PAICAT

Programa de Acompañamiento a Ingresantes a Carreras Tecnológicas

Módulo Matemática

utn bhi
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
Facultad Regional Bahía Blanca

Apuntes de clase y

Guías de actividades

Este material se encuentra en proceso de revisión y actualización. Noviembre 2025.

Índice general

1. NÚMEROS REALES

1.1 Conjuntos Numéricos

La noción de número es tan antigua como el hombre mismo ya que son necesarios para resolver situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, usamos números para contar una determinada cantidad de elementos, para establecer un orden entre ciertas cosas, para medir, etc.

Los conjuntos numéricos son agrupaciones o colecciones de números organizados de acuerdo a sus propiedades matemáticas comunes. Cada conjunto tiene su propia definición y propiedades que lo distinguen de los demás, lo que permite abordar una variedad de situaciones y problemas matemáticos de manera precisa y eficaz.

Los conjuntos numéricos forman la base de la aritmética y el análisis matemático y son esenciales para comprender y resolver una amplia gama de problemas en matemática y otras disciplinas científicas como la física, ingeniería, economía, estadística, programación, entre otras.

1.1.1 Números Naturales

Los números naturales se utilizan para contar objetos y representar cantidades discretas; por ejemplo, se usan para contar el número de personas en una reunión, la cantidad de aulas en una institución educativa. También permiten establecer un orden secuencial; por ejemplo, se pueden usar para enumerar posiciones en una competencia o etapas en un proceso productivo.

Este conjunto está formado por los elementos $1, 2, 3, \ldots.$ y se designa con el símbolo $\mathbb{N}$.

Simbólicamente se expresa como:

$$\boxed{\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots\}}$$

El conjunto de los números naturales es limitado en el sentido de que algunas operaciones matemáticas al efectuarse no dan un número natural como resultado. Por ejemplo:

- Si al restar dos números naturales, el minuendo es menor o igual que el sustraendo.
- En la división, si el dividendo no es múltiplo del divisor.
- En la raíz enésima de un número natural si éste no es a su vez la enésima potencia de un natural.

También, hay expresiones cotidianas que no pueden ser indicadas con números naturales. Cuando se habla de temperaturas por debajo de cero, al mencionar deudas, al referirse a la ubicación del subsuelo de un edificio. Entonces, los números enteros surgen como una solución a la limitación de los naturales.

1.1.2 Números Enteros

El conjunto de los números enteros se representa con la letra Z y está formado por los números naturales, los opuestos de cada número natural y el cero.

$$\boldsymbol{Z} = \{\dots, -\mathbf{4}, -\mathbf{3}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \dots\}$$

La suma, resta y multiplicación de números enteros da como resultado un número entero. Incluso algunas divisiones de números enteros dan como resultado un número entero, pero no todas. Por ejemplo, si se calcula 5:2 no se obtiene como cociente un número entero, es por ello que surge el conjunto de los números racionales.

1.1.3 Números Racionales

Los números racionales se forman a partir del cociente entre dos números enteros.

Simbólicamente:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \ \ y \ \ b \neq 0\right\}$$

Ahora sí, hay un conjunto numérico donde al operar con las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con números enteros da como resultado un elemento de este conjunto (un número racional).

Cualquier número entero puede escribirse como una fracción con denominador 1, esto permite decir que todo número entero es racional.

Los números racionales se pueden escribir de dos maneras:

- Con una fracción. **Ejemplos:** $\frac{3}{4}\ ;\ -\frac{1}{8}\ ;\ \frac{25}{37}\ ;\ \ 5\ ;\ \ -4$

- Con una expresión decimal. **Ejemplos:** $-\,0{,}85\ ;\ \ 12{,}49\ ;\ \ 1{,}\overline{33}\ ;\ \ 0{,}56\overline{7}$

Al efectuar la división entre numerador y denominador de una fracción, para obtener la expresión decimal puede ocurrir que:

- En algún paso de la división el resto es cero y en este caso se tiene una *expresión decimal finita* (número finito de cifras decimales).

- En cambio, si en algún momento los restos de la división comienzan a repetirse, la *expresión decimal es infinita y periódica*; las cifras que se repiten forman el período de la expresión decimal.

Por lo tanto:

Un número racional puede expresarse con una fracción o con una expresión decimal, y recíprocamente: toda expresión decimal finita ó infinita y periódica se corresponde con un número racional.

1.1.4 Números Irracionales

Existen números cuya expresión decimal no se corresponde con las dos categorías antes mencionadas, es decir, su expresión decimal no es exacta ni infinita y periódica, sino que tienen infinitas cifras decimales y estas no siguen ningún patrón.

Estos números no pueden ser escritos como cociente entre dos enteros, por lo tanto, no son números racionales, sino que son otro tipo de números, llamados *irracionales*. En otras palabras, los números irracionales son aquellos que no se pueden escribir en la forma $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

Algunos números irracionales famosos son:

- $\boldsymbol{\pi = 3,14159265}$ ... que representa la relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro.
- $\boldsymbol{e = 2,71828182}$ ... base de los logaritmos naturales.
- $\boldsymbol{\phi = 1,61803399}$ ... la razón áurea.

1.1.5 Números Reales

Hasta ahora se mencionaron dos "grandes" conjuntos numéricos: el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales. Uniendo a estos conjuntos numéricos, se forma el conjunto de los números reales, que se representa con el símbolo $\mathbb{R}$.

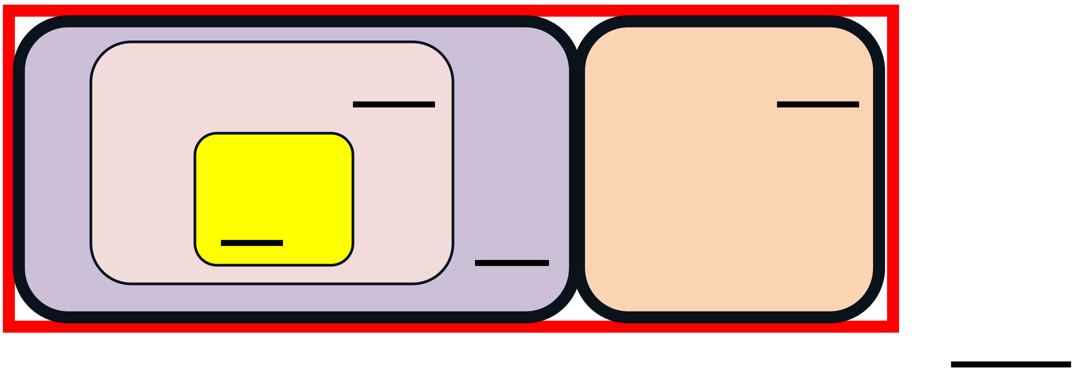
Simbólicamente:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$$

Las **propiedades** más sobresalientes del conjunto de los números reales son:

- Es infinito y ordenado.
- No tiene primer ni último elemento.
- Entre dos números reales existe un número infinito de números reales.

El siguiente esquema representa a todos los conjuntos numéricos mencionados anteriormente. Las y los invitamos a que escriban la letra (símbolo) que representa a cada conjunto numérico en el lugar que corresponda.



$\mathbb{N}$: **Conjunto de los números naturales.**

$\mathbb{Z}$: **Conjunto de los números enteros.**

$\mathbb{Q}$: **Conjunto de los números racionales.**

$\mathbb{I}$: **Conjunto de los números irracionales.**

$\mathbb{R}$: **Conjunto de los números reales.**

¡Revisamos lo aprendido!

Marcar con una cruz, según corresponda:

¿Número	12	$\sqrt{-4}$	$1,57$	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{36}}{2}$	$-2,2\overline{5}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt[3]{-8}$	$\frac{\pi}{2}$
natural?									
entero?									
racional?									
irracional?									
real?									

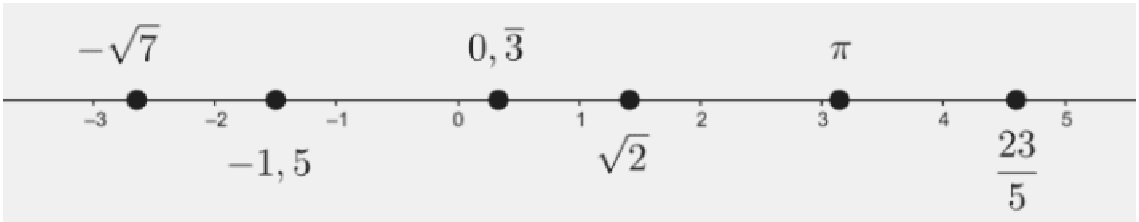
1.2 La Recta Numérica

Los números racionales y los irracionales completan la recta real.

A cada número real le corresponde un único punto sobre la recta numérica y a cada punto de la recta numérica se le asocia con un único número real.

En la figura 1 se muestra la ubicación de algunos números reales en la recta numérica.

Figura 1
Ubicación de números reales en la recta numérica.



Como $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado, permite distinguir entre el conjunto de números reales positivos (mayores que 0), que se indica con $\mathbb{R}^+$ y el conjunto de números reales negativos (menores que 0), que se nota $\mathbb{R}^-$.

Simbólicamente,

$$\mathbb{R}^+ = \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{a} > 0\}$$

Se lee "$\mathbb{R}^+$ *es el conjunto de los números* a *en* $\mathbb{R}$ *tales que* a *es mayor que cero*".

$$\mathbb{R}^- = \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{a} < 0\}$$

Se lee "$\mathbb{R}^-$ *es el conjunto de los números* a *en* $\mathbb{R}$ *tales que* a *es menor que cero".*

Ejemplos:

$$-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^- \quad \text{y} \quad \pi \in \mathbb{R}^+$$

1.3 Aproximación de un número real

La aproximación de un número real consiste en modificar su valor exacto y utilizar otro muy cercano. Esto suele hacerse al operar con números reales que tienen expresiones decimales infinitas.

En general, para representar la aproximación de un número se utiliza el símbolo $\approx$ o $\cong$

Las aproximaciones puede hacerse por truncamiento o redondeo. Por ejemplo, si se quiere aproximar el número irracional $\pi = 3{,}14159265\ldots..$ al diezmilésimo, o sea, con cuatro cifras decimales, se puede considerar:

- **Aproximación por redondeo:** se elimina a partir de la quinta cifra decimal y como la sexta cifra (9), $9 > 5$ se aumenta en una unidad a la última cifra conservada, que es el 5, $5 + 1 = 6$; luego se obtiene $\boldsymbol{\pi} \cong \mathbf{3,1416}$.

- **Aproximación por truncamiento:** se eliminan todas las cifras decimales, a partir de la quinta, y se obtiene $\boldsymbol{\pi} \cong \mathbf{3,1415}$.

EN GENERAL:

- En la **aproximación por redondeo** se eliminan todos los decimales posteriores al último dígito que se quiere conservar y, además, el decimal al que se quiere redondear se aumenta en 1 o se mantiene igual según el caso:

  - Si la cifra decimal siguiente al último decimal es mayor o igual que 5, la última cifra decimal se aumenta en 1.
  - Si la cifra decimal siguiente a la última cifra decimal es menor que 5, el último decimal se mantiene igual.

- En la **aproximación por truncamiento** a una cifra decimal determinada consiste en eliminar las cifras decimales que le siguen. Es decir, el truncamiento consiste es quitar las cifras que se encuentran a la derecha de la cifra por la que se quiere truncar.

Seguidamente se muestran más **ejemplos por redondeo de números reales**:

1. Redondeo a las décimas de 445,945 → 445,9
2. Redondeo a las centésimas de 7,03522 → 7,04
3. Redondeo a las milésimas de 39,802719 → 39,803

A continuación se muestran **ejemplos de aproximación por truncamiento**:

1. Truncamiento por la unidad de 9,634 → 9
2. Truncamiento por la décima de 4,13558 → 4,1
3. Truncamiento por la centésima de 71,0442 → 71,04

¡Aproximá a las centésimas los siguientes números reales!

a) $5,432$ **d)** $3,053$

b) $6,789$ **e)** $\sqrt{2}$

c) $302,109$ **f)** $1+\sqrt{5}$

1.4 Operaciones y Propiedades en el conjunto de los Números Reales

Sobre el conjunto $\mathbb{R}$ se definen dos operaciones elementales: la suma o adición y la multiplicación o producto donde se verifican las siguientes propiedades:

Sean $a, b\ y\ c \in \mathbb{R}$. Entonces:

PROPIEDAD	SUMA	MULTIPLICACIÓN
Asociativa	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$	$(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$
Conmutativa	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$
Distributiva de la multiplicación respecto a la suma	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}$ $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{ca}+\boldsymbol{cb}$	
Elemento neutro	**Existe $\mathbf{0}\in\mathbb{R}$ tal que** $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ **0 es el neutro aditivo**	**Existe $\mathbf{1}\in\mathbb{R}$ tal que** $\boldsymbol{a}\mathbf{1}=\mathbf{1}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ **1 es el neutro multiplicativo**
Elemento inverso	**Para cada $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}$ existe un único número real llamado opuesto (simétrico) de $\boldsymbol{a}$, y se escribe $-\boldsymbol{a}$, de forma que la suma de estos números es el neutro aditivo. Esto es, $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$**	**Para cada $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, existe un único número real llamado inverso de $\boldsymbol{a}$, que se escribe $\boldsymbol{a}^{-1}$, de forma que el producto de estos números es el neutro multiplicativo. Esto es,** $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-1}=\boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a}=\mathbf{1}$

1.5 Guía de Actividades

1. Indicar a qué conjunto/s numérico/s pertenece cada uno de los siguientes números. Luego ordenarlos de menor a mayor.

$$-\frac{5}{3};\quad \pi\,;\quad \frac{12}{5}\,;\quad \frac{6}{3}\,;\quad 0\,;\quad \sqrt{5}\,;\quad \frac{27}{6};\quad 4\,;\quad 3\sqrt{7};\quad \sqrt{8}-\sqrt{8};\quad 0,\widehat{14}$$

2. Considerar el conjunto de todos los números reales $\boldsymbol{x}$ que verifican que son mayores a -2 y menores o iguales que $\sqrt{8}$.

a) Representar en la recta real el conjunto dado.

b) ¿Cuántos números naturales hay en este conjunto? Nombrarlos.

c) ¿Cuántos números enteros hay en este conjunto? Nombrarlos.

d) Nombrar, si existen, tres números racionales e irracionales en este conjunto. Si no existen, explicar por qué.

3. Analizar, debatir con tus compañeros/as y **responder**.

a) Escribir un número racional no entero. ¿Pertenece al conjunto de los números naturales? ¿Por qué?

b) ¿Se puede escribir un número entero que no sea racional? Fundamentar la respuesta.

c) La raíz cuadrada de 11, ¿es un número racional o irracional?

d) ¿Se puede escribir un número que sea racional e irracional? ¿Por qué?

e) Un número irracional, ¿pertenece al conjunto de los números reales?

f) ¿Cuántos números reales existen entre 1 y 2? ¿y entre 1,3 y 1,4?

4. Analizar y decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F), justificando claramente la respuesta.

1. Todo número entero pertenece al conjunto de los números naturales.

2. Todo número natural es un número irracional.

3. Todo número racional es un número real.

4. Todo número real expresado en forma decimal de período infinito es irracional.

5. Todo número irracional es un número real.

1.6 Valor absoluto de un número real

1.6.1 Concepto

El valor absoluto de un número real $\boldsymbol{a}$ se define como el número real no negativo (es decir, mayor o igual a 0) y lo notamos $|\boldsymbol{a}|$. Simbolicamente lo expresamos como:

$$|\boldsymbol{a}| = \begin{cases} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{si\ a \geq 0} \\ -\boldsymbol{a} & \boldsymbol{si\ a} < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

- $|\mathbf{5}| = \mathbf{5}\ \ \boldsymbol{porque}\ \ \mathbf{5} > 0$
- $|-\sqrt{\mathbf{3}}| = -(-\sqrt{\mathbf{3}}) = \sqrt{\mathbf{3}}\ \ \boldsymbol{porque}\ \ -\sqrt{\mathbf{3}} < 0$
- $|\mathbf{0}| = \mathbf{0}\ \ \boldsymbol{porque}\ \ \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $|\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{2}}| = -(\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{2}}) = \sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}\ \ \boldsymbol{porque}\ \ \mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{2}} < 0$

También, se pueden realizar operaciones dentro del valor absoluto. Sus “barras” funcionan como paréntesis, se debe operar primero y luego, aplicar su definición.

$$|\ \mathbf{2} + \mathbf{5}\ | = |\ \mathbf{7}\ | = \mathbf{7}$$

$$|\ -\mathbf{5} - \mathbf{5}\ | = |\ -\mathbf{10}\ | = \mathbf{10}$$

$$|\ \mathbf{2,5} - \mathbf{4}\ | = |\ -\mathbf{1,5}\ | = \mathbf{1,5}$$

$$|\ \mathbf{2} - \mathbf{2}\ | = |\ \mathbf{0}\ | = \mathbf{0}$$

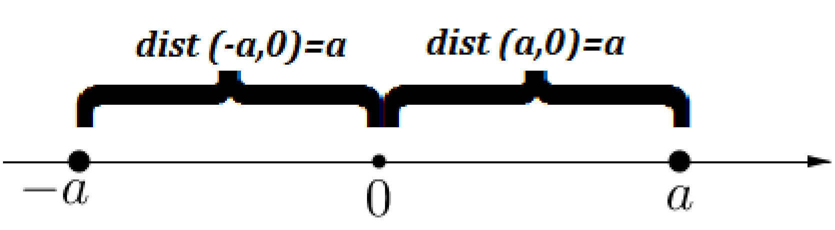
$$|\ (-\mathbf{2})(-\mathbf{3})\ | = |\ \mathbf{6}\ | = \mathbf{6}$$

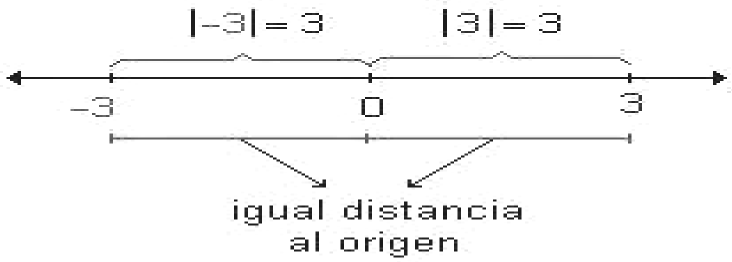
1.6.2 Interpretación geométrica: noción de distancia

El valor absoluto de un número real se asocia con una interpretación geométrica muy adecuada como es la noción de ***distancia***. Más precisamente, con la **distancia de un número real $\boldsymbol{a}$ al 0**.

Para cualquier número real y su opuesto, la distancia al origen es la misma. Por ejemplo, -10 y 10 están ambos a diez unidades de distancia del 0, o sea, $|\ 10\ | = |\ -10\ | = 10$.

En general, si $\boldsymbol{a}$ es un número real y $-\boldsymbol{a}$ es su opuesto, entonces $|\ \boldsymbol{a}\ | = |\ -\boldsymbol{a}\ |$.





1.6.3 Distancia entre números

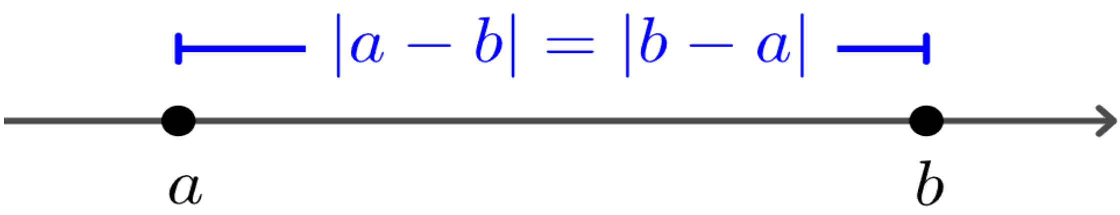
Si se desea conocer la distancia entre, por ejemplo, 6 y 15 en la recta real, se puede restar al mayor número el menor y obtenerla: $15 - 6 = 9$. Entonces, hay 9 unidades de distancia entre esos números. Pero si realizamos la diferencia $6 - 15$ el resultado será negativo.

Teniendo el concepto de valor absoluto, ya no es necesario preocuparse por ubicar bien los números al realizar la diferencia, pues el resultado siempre será positivo.

Para calcular la **distancia entre dos números reales**, realizamos el valor absoluto de su diferencia.

Simbólicamente:

Si *a* y *b* son números reales, la distancia entre ellos es: $\boldsymbol{d(a,b) = | a - b |}$



Ejemplo 1

- La distancia entre 10 y 7 es $d(10,7) = | 10 - 7 | = | 3 | = 3$
- La distancia entre 5 y -3 es $d(5,-3) = | 5 - (-3) | = | 5 + 3 | = | 8 | = 8$
- La distancia entre -3 y -5 es $d(-3,-5) = | -3 - (-5) | = | -3 + 5 | = | 2 | = 2$

Notar que $| \boldsymbol{a - b} | = | \boldsymbol{b - a} |$, por lo tanto no importa el orden de la sustracción.

Ejemplo 2

Expresá simbólicamente los siguientes enunciados:

(1) x está a más de 3 unidades de 7
$d(x, 7) = |x - 7| > 3$

(2) x no está a más de 5 unidades de 8
$d(x, 8) = |x - 8| \leq 5$

(3) x está a 4 unidades de -3
$d(x, -3) = |x + 3| = 4$

¡A pensar!

Relacioná cada conjunto de la columna de la izquierda con su expresión correspondiente de la columna de la derecha.

(1) El conjunto de los números reales cuya distancia a -3 es menor que 1.
(2) El conjunto de los números reales cuyo cuadrado es mayor que 4.
(3) El conjunto de los números reales cuya distancia a -4 es igual a su distancia a 3.
(4) El conjunto de los números reales cuya distancia al origen es mayor o igual a 3/2.
(5) El conjunto de los números reales cuya distancia a 7 es menor que 5.

(a) $|x| \geq 3/2$
(b) $|x - 7| < 5$
(c) $|x| > 2$
(d) $|x + 3| < 1$
(e) $|x + 4| = |x - 3|$

1.6.4 Propiedades

A continuación, se enuncian las principales propiedades del valor absoluto, considerando $a, b \in \mathbb{R}$.

PROPIEDAD	EJEMPLOS
$\lvert \boldsymbol{ab} \rvert = \lvert \boldsymbol{a} \rvert \lvert \boldsymbol{b} \rvert$	
$\left\lvert \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \right\rvert = \frac{\lvert \boldsymbol{a} \rvert}{\lvert \boldsymbol{b} \rvert} \; , \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$	
$\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = \lvert \boldsymbol{a} \rvert$	

Para analizar y debatir:

$$¿\,\lvert \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rvert = \lvert \boldsymbol{a} \rvert + \lvert \boldsymbol{b} \rvert \;\; \boldsymbol{para\ todo\ a, b} \in \mathbb{R}?$$

1.6.5 Guía de Actividades

1. Marcar con una cruz X en la opción correcta.

	V	F
a. $\|-1\| = 1$	( )	( )
b. $\|1\| = -1$	( )	( )
c. $\|8-6\| = \|6-8\|$	( )	( )
d. $\|0-3\| = \|3-0\|$	( )	( )
e. $\|-6+3\| = \|3-6\|$	( )	( )
f. $-\|5\| = -5$	( )	( )
g. $-\|5\| = 5$	( )	( )

2. Sea $\boldsymbol{x = -2}$, $\boldsymbol{y = 6}$, $\boldsymbol{z = -3}$. **Calcular** el valor numérico de la expresión $\frac{z|x|}{|y|}$ e **indicar** a qué conjunto/s pertenece el resultado hallado.

3. Expresar cada una de las siguientes expresiones utilizando la noción de *valor absoluto*.

a) Todos los números reales $\boldsymbol{x}$ que distan $\boldsymbol{7}$ unidades de $\boldsymbol{0}$.

b) Todos los números reales $\boldsymbol{z}$ que están exactamente $\boldsymbol{2}$ unidades de 15.

c) La distancia entre $-\boldsymbol{3}$ y $\boldsymbol{w}$ es $\boldsymbol{4}$.

d) La distancia entre la suma del doble de un número real $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{3}$, no es mayor que el triple de dicho número.

1.7 Potenciación

1.7.1 Concepto

Sea $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, se define la potencia n - ésima de a como:

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a.\,a \dots a}_{n\;veces\;a}}$$

El número a se denomina base de la potencia y n es el exponente.

Observaciones:

1) Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, se amplía la definición de potencia para $n = 0$ y para potencias enteras negativas:

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

$$\boldsymbol{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}} \qquad \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

2) Si $a = 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\boldsymbol{a^n = 0^n = 0}$

¿Qué sucede si $\boldsymbol{a = 0}$ y $\boldsymbol{n \in Z^-}$,

con $\boldsymbol{a^n}$?

1.7.2 Propiedades

Sean $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{n, m} \in \mathbb{N}$.

PROPIEDAD	EXPRESIÓN SIMBÓLICA
Producto de potencias de igual base	$a^m . a^n = a^{m+n}$
Cociente de potencias de igual base	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Potencia de un producto	$(a.b)^m = a^m . b^m$
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0$
Potencia de otra potencia	$(a^m)^n = a^{m.n}$
Potencia de exponente negativo	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0; \ b \neq 0$

¿Por qué $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **?**

¿Por qué $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **?**

1.8 Radicación

1.8.1 Concepto

Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, se define la raíz n - ésima de a como:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b} \quad \textbf{si y sólo} \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}$$

Observaciones:

1) Si $a = 0$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\sqrt[n]{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$ porque $\mathbf{0} = \mathbf{0}^{\boldsymbol{n}}$

2) Si $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ **existe siempre**, es decir, su valor es un número real.

3) Si $a < 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ **existirá en el conjunto de los números reales si $\boldsymbol{n}$ es impar.**

Los ejemplos siguientes dan muestra de las observaciones mencionadas.

- Si n es impar y $a \in \mathbb{R}$, la raíz real de a siempre existe.

$$\sqrt[3]{\mathbf{8}} = \mathbf{2} \ ; \quad \sqrt[5]{-\mathbf{243}} = -3$$

- Si n es par y $a > 0$, la raíz de a existe y es positiva.

$$\sqrt{\mathbf{4}} = \mathbf{2} \ ; \quad \sqrt[4]{\mathbf{81}} = 3$$

- Si n es par y $a < 0$, la raíz de a no existe en el conjunto de los números reales.

$$\sqrt{-\mathbf{4}} \ \textbf{\textit{no tiene solución real porque no existe un}} \ b \in \mathbb{R} \ \textbf{\textit{tal que}} \ \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} = -\mathbf{4}$$

1.8.2 Propiedades

Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{+}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$.

PROPIEDAD	EXPRESIÓN SIMBÓLICA
Producto de radicales de igual índice	$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
Cociente de radicales de igual índice	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
Potencia de un radical	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
Raíz de una raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\,n]{a}$
Amplificación de radical	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[m\,n]{a^m}$

Si $a, b \in \mathbb{R}^-$, se debe analizar cuidadosamente si las propiedades se pueden aplicar.

¿ $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$,

para valores posibles de a, b y n?

1.8.3 Operaciones con radicales

Adición y sustracción: Se pueden realizar estas operaciones cuando los términos tienen radicales semejantes. Dos radicales son *semejantes* cuando tienen igual índice y el mismo radicando.

Ejemplos:

$$2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4 + 1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3 - 2 - 1)\sqrt[4]{5} = 0$$

Ahora, analicemos qué pasa con el siguiente ejemplo:

$$\sqrt{12} - 3\,\sqrt{3} + 2\,\sqrt{75}$$

Se escriben los radicandos en producto de factores primos:

$$12 = 2^2\,.\,3 \quad ; \quad 75 = 3\,.\,5^2$$

Luego:

$$\sqrt{12} - 3\,\sqrt{3} + 2\,\sqrt{75} = \sqrt{2^2\,.\,3} - 3\,\sqrt{3} + 2\,\sqrt{3\,.\,5^2}$$

Se extraen factores de los radicales y se multiplican por el coeficiente del radical correspondiente:

$$\sqrt{12} - 3\,\sqrt{3} + 2\,\sqrt{75} = \sqrt{2^2\,.\,3} - 3\,\sqrt{3} + 2\,\sqrt{3\,.\,5^2}$$
$$= 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Multiplicación y división: El producto o cociente de radicales es el radical que se obtiene multiplicando o dividiendo a radicales a común índice.

Ejemplos:

Radicales de igual índice

$$\sqrt{2}\,\sqrt{3} = \sqrt{2\,.\,3} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{-8\,.\,125} = \sqrt[3]{-8}\;\sqrt[3]{125} = -2\,.\,5 = -10$$

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

Radicales de distinto índice

Propiedad: $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[nk]{x^{mk}}$, $n, m, k \in \mathbb{N}$

$$\boldsymbol{\sqrt[5]{3}\,.\,\sqrt[4]{2} = \sqrt[20]{3^4}\,.\,\sqrt[20]{2^5} = \sqrt[20]{3^4\,.\,2^5} = \sqrt[20]{2592}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[12]{(2^2)^2}}{\sqrt[12]{2^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[12]{2}}$$

1.8.4 Potencia de exponente racional

Considerando las definiciones de potenciación y radicación presentadas se define la ***potencia de exponente racional*** de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad si\ a \in \mathbb{R}^+\ \ y\ \ m, n \in \mathbb{N}}$$

Se puede extender la definición anterior para exponentes racionales negativos:

$$\boldsymbol{a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$$

Ejemplo 1: Expresar cada una de las siguientes potencias de exponente racional en radicales o viceversa.

$$\boldsymbol{9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} \quad ; \quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} \quad ; \quad 2^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{2^4} \quad ; \quad \sqrt[7]{\left(\frac{4}{5}\right)^6} = \left(\frac{4}{5}\right)^{6/7} \quad ; \quad 3^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}}$$

Ejemplo 2: Escribí los radicales del siguiente cálculo como potencias de exponente racional, luego resolver aplicando propiedades de potenciación y expresar el resultado con radicales.

$$\boldsymbol{\frac{(3^{-1})^{-\frac{1}{4}}\ \sqrt{3\,.\,5^3}}{\left(5^4\,.\,\sqrt[4]{3^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(3^{-1})^{-\frac{1}{4}}\ \ (3\,.\,5^3)^{\frac{1}{2}}}{\left(5^4\,.\,3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{4}}\,.\,3^{\frac{1}{2}}\,.\,5^{\frac{3}{2}}}{5^2\,.\,3^{\frac{1}{4}}} = 3^{\frac{1}{2}}\,.\,5^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}}$$

1.8.5 Racionalización de denominadores

¿Qué es la racionalización de denominadores?

Es un proceso matemático (una técnica) que permite encontrar una expresión equivalente a la expresión original pero "eliminando" cualquier radical en el denominador.

La idea principal es multiplicar la expresión original por una expresión apropiada, de tal forma que después de trabajar algebraicamente y simplificar, el denominador de la expresión original, ya no tenga ningún radical.

Los casos más frecuentes de racionalización en el denominador son:

a) Racionalizar expresiones que contengan una raíz cuadrada.

b) Racionalizar expresiones que contengan raíz de índice mayor a dos.

c) Racionalizar expresiones que contengan la suma o resta de dos más raíces cuadradas o bien la suma o resta de un número real con una raíz cuadrada.

Ejemplo 1: Racionalizar expresiones que contengan una raíz cuadrada.

En este caso se multiplica numerador y denominador por esa misma raíz.

- $$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5\,.5}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

- $$\frac{2-\sqrt{13}}{\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{13\,.3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{39}}{3}$$

- $$\frac{\sqrt{2}+6}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{2}+6}{\sqrt{2\,.\,3^2}}=\frac{\sqrt{2}+6}{\sqrt{2\,.\,3^2}}=\frac{\sqrt{2}+6}{3\,\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+6}{3\,\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2+6\sqrt{2}}{3\,.\,2}=\frac{2+6\sqrt{2}}{6}=$$
$$\frac{2}{6}+\frac{6\,\sqrt{2}}{6}=\frac{1}{3}+\sqrt{2}$$

Ejemplo 2: Racionalizar expresiones que contengan raíz de índice mayor a dos.

Este caso es similar al anterior, sin embargo, en el denominador hay una raíz cuyo índice es mayor que dos. Entonces, ¿servirá multiplicar y dividir por esa raíz? La respuesta es que NO. Te invitamos a que lo plantees y observes qué ocurre.

¿Cómo continuamos? La forma general de realizar esta racionalización es multiplicar la fracción por otra fracción de la siguiente manera:

$$\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} \qquad si\ \ n > m$$

Analicemos la estrategia propuesta con los siguientes ejemplos:

- $\boldsymbol{Sea\ x \neq 0}$:

$$-\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} = -\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2\,.\,x^3}} = -\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}} = -\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$$

- $$\frac{7+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{7+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\,\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{(7+\sqrt{3})\,\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2\,.\,2^2}} = \frac{(7+\sqrt{3})\,\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} =$$
$$\frac{(7+\sqrt{3})\,\sqrt[3]{4}}{2}$$

Ejemplo 3: Racionalizar expresiones que contengan la suma o resta de dos más raíces cuadradas o bien la suma o resta de un número real con una raíz cuadrada.

Cuando en el denominador se tiene un binomio formado por la suma o resta de una o dos raíces cuadradas, la estrategia es obtener una diferencia de cuadrados en el denominador.

¿Y cómo se obtiene esa diferencia de cuadrados? El procedimiento general es multiplicar y dividir por un binomio que conserve los mismos términos que el denominador original, pero le cambie el signo a uno de ellos.

En los ejemplos siguientes se muestra el procedimiento explicado anteriormente.

- $$\frac{3}{3-\sqrt{3}} = \frac{3}{3-\sqrt{3}}\,\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{3\,(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{3\,(3+\sqrt{3})}{9-3} =$$
$$\frac{3\,(3+\sqrt{3})}{6} = \frac{(3+\sqrt{3})}{2} = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$$

- $$-\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = -\frac{2\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} =$$
$$-\frac{2\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = -2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

- $\boldsymbol{Sea\ x \geq 0\ y\ x \neq 7}$:  **¿Por qué?**

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x}+\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{3}\left(\sqrt{x}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{7}\right)} = \frac{6\sqrt{3}\left(\sqrt{x}+\sqrt{7}\right)}{x-7}$$

1.9 Guía de Actividades

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. **Aplicar** propiedades de la potenciación y **verificar** las siguientes igualdades.

a) $(10\,.\,2^{n+1})^3 : (2^{n+2})^3 = 5^3$

b) $2^{2-n}\,(2\,.\,2^{n+1} + 2^{n+2}) = 2^5$

2. Hallar la mínima expresión, aplicando las propiedades de la radicación, suponiendo que $\boldsymbol{a > 0}$ y $\boldsymbol{x > 0}$:

a) $\sqrt{a^3}\,.\,\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a^4}$

b) $\sqrt[3]{x^2\,a^5}\,.\,\sqrt[3]{x^7\,a}$

c) $\sqrt[9]{\dfrac{x^{15}}{x^{12}}}$

d) $\sqrt[6]{x^4}\,.\,\sqrt[9]{x^6}\,.\,\sqrt[15]{x^{10}}$

3. Señalar y explicar el o los errores en las siguientes igualdades.

a) $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y} = \dfrac{\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}}{x+y} = \dfrac{x+y}{x+y} = 1$

b) Si $z = \sqrt{3}+1$, entonces $z^2 - z = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 - \left(\sqrt{3}+1\right) = 3 + 1 - \sqrt{3} + 1$

4. Indicar, **<u>escribiendo en el recuadro</u>**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas (**V**) o falsas (**F**), justificando claramente la respuesta.

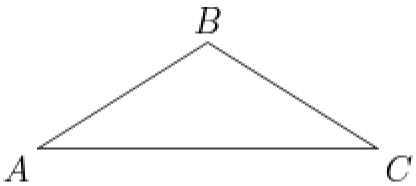
a) Sean $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, la expresión simplificada de $\boldsymbol{\left(\dfrac{b^4}{a^2}\right)^3 \left(\dfrac{2a^{-1}b}{a^2b^{-3}}\right)^{-3}}$ es $\boldsymbol{\dfrac{1}{8}a^3}$. $\square$

b) Al realizar las operaciones del siguiente cálculo $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt[3]{27a^3} - 3\sqrt[5]{-32a^5}}{\sqrt[15]{-a^{15}}} + \dfrac{4\sqrt[3]{-125a^3}}{\sqrt[3]{8a^3}}}$ $\square$
se obtiene como resultado un **número racional positivo**, para cualquier valor de $a \neq 0$.

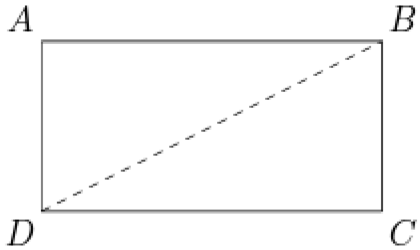
c) La mínima expresión equivalente a $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt[6]{x^{10}}}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{\sqrt{4x^4}\,.\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}}}$ es $\boldsymbol{3x}$ para $x \neq 0$. $\square$

5. Determinar, **en forma exacta**, el perímetro y el área de las siguientes figuras.

(a) $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo isósceles,
$|\overline{AC}| = 12\sqrt{3}$ cm,
$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 10\sqrt{3}$ cm.



(b) $ABCD$ es un rectángulo,
$|\overline{AB}| = 4\sqrt{2}$ cm,
$|\overline{BD}| = 5\sqrt{2}$ cm.



Luego, **aproximar** los resultados hallados en el inciso (a) por redondeo y los del inciso (b) por truncamiento.

6. **Racionalizar** los siguientes denominadores.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ **b)** $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

d) $\frac{5}{\sqrt{14}+2}$ **e)** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$ **f)** $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, $x > 0, y > 0$

¿Qué valores se le puede asignar a la variable $\boldsymbol{a}$ del inciso $\boldsymbol{e}$)? ¿Por qué?

2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.1 Definición

Una **expresión algebraica** se define como el conjunto de variables y constantes (letras y números) combinadas por operaciones matemáticas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación).

Las expresiones algebraicas son fundamentales en el ámbito de las matemáticas, ya que representan relaciones y operaciones que permiten resolver una amplia variedad de problemas, desde la resolución de ecuaciones hasta la modelación de situaciones del mundo real. Esto hace que las expresiones sean utilizadas en diversas áreas y disciplinas, incluyendo la física, la economía y la ingeniería.

Las siguientes expresiones son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^2 + 2xy \quad ; \quad \sqrt{2x} + y^2 x^3 \quad ; \quad \frac{xy - 2x}{x^2 + 1}$$

En este módulo se trabajará con un tipo de expresión algebraica particular, denominada ***POLINOMIO***.

2.2 Polinomios

Definición: Las expresiones algebraicas del tipo $a.x^n$, con $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se denominan **monomios**. En dicha expresión, ***a*** recibe el nombre de coeficiente y ***n*** indica su grado.

Ejemplo: $4x^3$ es un monomio de grado 3. Su coeficiente es 4.

Definición: Un polinomio con coeficientes reales es una expresión algebraica que se define de la siguiente manera:

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x^1 + a_0\, x^0$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, son números reales, x se determina indeterminada, y n es un número natural o cero.

Observaciones:

- La palabra polinomio se compone de **poli** = muchos y **nomios** = términos.
- Cada término de un polinomio se denomina **monomio**.

Elementos de los Polinomios

Si $\boldsymbol{a_n} \neq \mathbf{0}$, se distinguen los siguientes elementos de un polinomio:

- a_n es el coeficiente principal,
- a_0 es el término independiente,
- n es el grado del polinomio.

Ejemplos:

(a) El polinomio $S(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^5 + 7$ tiene como coeficiente principal a -3 y su término independiente es 7;

(b) El polinomio $T(x) = -x^6 - 8x + x^4$ tiene como coeficiente principal a -1 y su término independiente es 0;

(c) El polinomio $Q(x) = -3 - 8x^9 + 5x - 4x^3$ tiene como coeficiente principal a -8 y su término independiente es -3.

Definición: Los polinomios cuyo coeficiente principal es 1, se los denomina **mónicos**.

Ejemplo: $R(x) = x^3 + 3x^2 - \sqrt{2}$ es un polinomio mónico.

Definición: Se denomina **grado de un polinomio** al mayor exponente que tiene la variable "x" de los términos con coeficientes no nulos.

*Notación: El grado de un polinomio P, se denota como **gr (P)**.*

Ejemplos:

(a) El polinomio $S(x)=6x+x^2-7x^5$ tiene grado **5**, porque es el mayor exponente que aparece; es decir, $\boldsymbol{gr}(S)=\mathbf{5}$.

(b) El grado del polinomio $Q(x)=10-x^3+x$ es **3**, y se expresa como ***gr (Q) = 3.***

(c) El polinomio $T(x)=7$ tiene grado **0** porque $7=7x^0$; ***gr (T) = 0.***

Observaciones:

- Un polinomio ***P*(x) = k, k** $\in \mathbb{R}-\{0\}$ y se lo denomina **polinomio constante.** Por ejemplo *T(x)=7* es un polinomio constante.
- $P(x)=0$ es un polinomio constante especial, ya que siempre vale cero. Recibe el nombre de **polinomio nulo** y decimos que carece de grado.

Clasificación

Según la cantidad de términos, un polinomio se denomina:

- **Monomio**, si tiene *un solo término*.

Ejemplos: $P(x)=3x^2$, $Q(x)=\sqrt{5}$

- **Binomio**, si tiene *dos términos.*

Ejemplos: $P(x)=3x^2-7x$, $Q(x)=-x+4$

- **Trinomio**, si tiene *tres términos.*

Ejemplo: $P(x)=x+3x^2-9x^{10}$

- **Cuatrinomio**, si tiene *cuatro términos.*

Ejemplo: $P(x)=8x^6-2x^5-x+3$

Conceptos importantes

- Un polinomio de grado *n* está **completo** cuando entre sus términos aparecen todos los exponentes de *n* hasta 0. Si alguno de los términos falta, el polinomio es **incompleto.**

Ejemplos:

(a) El polinomio $R(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 8x + 7$ es un polinomio completo.

(b) El polinomio $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 9$ está incompleto porque faltan los términos correspondientes a x^3 (término cúbico) y a x (término lineal).

Para **completar un polinomio**, se agregan los términos con los exponentes faltantes con coeficientes iguales a cero, como se muestra a continuación:

Ejemplos:

(a) Si se tiene $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 9 \Rightarrow Q(x) = x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 9$ es un polinomio completo.

(b) Considerando $M(x) = 2x^2 - 8 \Rightarrow M(x) = 2x^2 + 0x - 8$ es un polinomio completo.

- Un polinomio está **ordenado** si los grados de sus monomios están ordenados en forma creciente o decreciente.

Ejemplos

$$\left.\begin{array}{l} (a)\ F(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 5 \\ (b)\ G(x) = 7 + x + 3x^2 - x^3 \\ (c)\ H(x) = x^5 + 2x^2 - 7 \end{array}\right] \text{ son polinomios ordenados.}$$

(d) $T(x) = -x^6 - 8x + x^4$ es un polinomio no ordenado.

- Dos polinomios P(x) y Q(x) son **iguales** si son del mismo grado y los coeficientes de los términos semejantes (de igual grado) son iguales. Es decir, si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ y $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 x^0$, son dos polinomios de grado n, entonces P(x) = Q(x) sí y solo si, $a_n = b_n$; $a_{n-1} = b_{n-1}$; … ; $a_1 = b_1$; $a_0 = b_0$.

- El **polinomio opuesto** al polinomio P(x) es un polinomio que tiene el mismo grado que P(x) y sus coeficientes son los opuestos de los coeficientes de P(x); se nota como **-P(x)**.

Ejemplo: El polinomio opuesto de $P(x) = -7x^2 - 2x + 1$ es $-P(x) = 7x^2 + 2x - 1$.

Definición: Dado un polinomio *P(x)* y $a \in \mathbb{R}$, *se llama* **valor numérico de** *P(x) o* **especialización de** *P(x)* para $x = a$ y notamos $P(a)$ *,* al valor que toma el polinomio al reemplazar la indeterminada **x** por $\boldsymbol{a}$ y efectuando las operaciones indicadas.

Ejemplos: Calcular el valor numérico de los siguientes polinomios en los valores indicados.

(a) $P(x) = 3x^2 + x + 5$ en $x = 1$, $P(1) = 3.(1)^2 + 1 + 5 \Rightarrow P(1) = 9$

(b) $Q(x) = -x^7 - 2x^2 + 3$ en $x = -1$, $Q(-1) = -(-1)^7 - 2(-1)^2 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2 \Rightarrow Q(-1) = 2$

2.2.1 OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

Suma y resta

Para hallar la suma de dos o más polinomios **se suman (o restan) los términos semejantes**, es decir, aquellos términos en los que la variable tiene el mismo exponente. Si los polinomios están desordenados, se los puede ordenar para la realizar la operación ya que esto facilita el reconocimiento de los términos semejantes.

Ejemplo: Realizar $M(x)+B(x)$ siendo $M(x)=-\frac{1}{2}x^5+2x^2-5x+3$ y $B(x)=-4x^5+7x^4-x+3$

$$\begin{aligned} M(x)+B(x) &= -\frac{1}{2}x^5+2x^2-5x+3+\left(-4x^5+7x^4-x+3\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^5-4x^5+7x^4+2x^2-5x-x+3+3 \\ &= \left(-\frac{1}{2}-4\right)x^5+7x^4+2x^2+(-5-1)x+(3+3) \\ &= \boxed{-\frac{9}{2}x^5+7x^4+2x^2-6x+6} \end{aligned}$$

Otra manera de realizar la suma podría ser la siguiente:

Ejemplo: Realizar *P(x)* + *Q(x)*, siendo $P(x)=3x^5+0x^4-4x^3-2x$ y $Q(x)=2x^5-x^4-2x^3+0x$

$$\begin{array}{rl} & P(x)=3x^5+0x^4-4x^3-2x \\ + & \\ & Q(x)=2x^5-x^4-2x^3+0x \\ \hline & S(x)=5x^5-x^4-6x^3-2x \end{array}$$

El polinomio *S(x)*, suma entre *P(x)* y *Q(x)* es $S(x)=5x^5-x^4-6x^3-2x$

Observación: El grado del polinomio suma es menor o igual que el grado de los polinomios sumados o carece de grado.

*Para **restar** dos polinomios se busca el polinomio opuesto del segundo y se suma lo obtenido al primero.*

Ejemplo: Hallar $P(x)-S(x)$ siendo $P(x)=x^5+2x^4-3x^3-2$ y $S(x)=3x^4-5x^2-3$

$$P(x)-S(x)=\left(x^5+2x^4-3x^3-2\right)-\left(3x^4-5x^2-3\right)$$

$$=x^5+2x^4-3x^3-2-3x^4+5x^2+3$$

$$=x^5+(2x^4-3x^4)-3x^3+5x^2+(-2+3)$$

$$=x^5+(2-3)x^4-3x^3+5x^2+(-2+3)$$

$$=\boxed{x^5-x^4-3x^3+5x^2+1}$$

Multiplicación

Para multiplicar polinomios se aplica la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada término de un polinomio por los términos del otro y luego se agrupan (sumando o restando) los términos semejantes.

Observación: El grado del producto de dos polinomios no nulos es la suma de los grados de los polinomios factores, es decir $gr\ [P(x)\cdot Q(x)]=gr\ P(x)+gr\ Q(x)$.

Ejemplo: Multiplicar los polinomios $P(x)=3x^3-2x$ y $Q(x)=7x^2-5$

$$P(x).Q(x)=\left(3x^3-2x\right).\left(7x^2-5\right)$$

$$=3x^3.7x^2+3x^3.(-5)-2x.7x^2-2x.(-5)$$

$$=21x^5-15x^3-14x^3+10x$$

$$=\boxed{21x^5-29x^3+10x}$$

Algunos productos especiales

- Binomio al cuadrado $\qquad (A+B)^2=A^2+2.A.B+B^2$
- Binomio al cubo $\qquad (A+B)^3=A^3+3.A^2.B+3.A.B^2+B^3$
- Producto de binomios conjugados $\qquad (A+B).(A-B)=A^2-B^2$

División

La división entre dos polinomios *P(x)* y *Q(x)* es posible realizarla siempre y cuando *Q(x)* no sea el polinomio nulo y el grado de *P(x)* sea mayor o igual que el grado de *Q(x)*.

Para dividir polinomios se usa un procedimiento similar al de la división entera entre números enteros. Para lo cual el polinomio dividendo *P(x)* debe estar completo y ordenado en forma decreciente y el polinomio divisor *Q(x)*, ordenado en forma decreciente. Obtendremos un polinomio cociente *C(x)* y un polinomio resto *R(x)*.

$$\begin{array}{rl|l} \textit{dividendo} \leftarrow & P(x) & \underline{Q(x)} \rightarrow \textit{divisor} \\ \textit{resto} \leftarrow & R(x) & C(x) \rightarrow \textit{cociente} \end{array}$$

Observaciones:

- Siempre se cumple que $\boldsymbol{P(x)=Q(x).C(x)+R(x)}$.
- El polinomio resto, *R(x)*, tiene menor grado que el polinomio divisor o es el polinomio nulo. (Esto indica cuándo finalizar la operación).
- El grado del polinomio cociente *C(x)* es la diferencia entre los grados de *P(x)* y *Q(x)*, es decir, $gr\ C(x)=gr\ P(x)-gr\ Q(x)$.

Ejemplo: Dividir el polinomio $P(x)=8x^4-6x^2+x$ por el polinomio $Q(x)=2x^2-3$

1. Escribimos ambos polinomios en forma decreciente; y el polinomio dividendo completo.

$$8x^4+0x^3-6x^2+x+0 \quad \underline{|2x^2-3}$$

2. Calculamos el cociente entre el termino principal de P(x) y el del divisor Q(x). Esto es $8x^4$ / $2x^2=4x^2$ Luego multiplicamos este cociente por el divisor y lo restamos de P(x).

$$\begin{array}{rl} & 8x^4+0x^3-6x^2+x+0 \quad \underline{|2x^2-3} \\ - & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4x^2 \\ & \underline{8x^4+0x^3-12x^2 \qquad\qquad} \\ & 0x^4+0x^3+6x^2+x+0 \end{array}$$

3. Calculamos ahora el cociente entre el término de mayor grado de la resta y el divisor Q(x). En nuestro ejemplo tenemos $6x^2 \ / \ 2x^2 = 3$. Multiplicamos el divisor por este cociente y lo restamos al polinomio que obtuvimos en el paso anterior.

$$
\begin{array}{rl}
8x^4+0x^3-6x^2+x+0 & \underline{|2x^2-3} \\
- \qquad\qquad\qquad\qquad & 4x^2+3 \\
\underline{8x^4+0x^3-12x^2 \qquad\quad} & \\
0x^4+0x^3+6x^2+x+0 & \\
- \qquad & \\
\underline{6x^2+x+9} & \\
0x^2+x+9 &
\end{array}
$$

Por lo tanto, el polinomio cociente es $C(\mathrm{x}) = 4x^2+3$ y el polinomio resto es $R(\mathrm{x}) = x+9$ (observemos que el grado del polinomio resto es menor al grado del polinomio divisor).

__Ejemplo__: Si $P(x)=2x^6-4x^2+5$ y $Q(x)=x^3+2x-3$, realizar $P(x):Q(x)$.

$$
\begin{array}{rl}
2x^6+0x^5+0x^4+0x^3-4x^2+0x+5 & \underline{|x^3+2x-3} \\
- \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & 2x^3-4x+6 \\
\underline{2x^6 \qquad\quad +4x^4-6x^3 \qquad\qquad\qquad} & \\
0x^6+0x^5-4x^4+6x^3-4x^2+0x+5 & \\
- \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\underline{-4x^4 \qquad\quad -8x^2+12x} & \\
0x^4+6x^3+4x^2-12x+5 & \\
- \qquad\qquad\qquad & \\
\underline{6x^3 \qquad\quad +12x-18} & \\
0x^3+4x^2-24x+23 &
\end{array}
$$

Por lo tanto, el polinomio cociente es $C(\mathrm{x})=2x^3-4x+6$ y el polinomio resto es $R(\mathrm{x})=4x^2-24x+23$.

2.2.2 MÉTODO (REGLA) DE RUFFINI

El método de Ruffini permite realizar, de forma sencilla, divisiones de polinomios en el caso particular en el que el polinomio divisor sea de la forma $Q(x) = x - c\ ,\ c \in \mathbb{R}$.

Procedimiento para hallar el cociente y el resto de dividir al polinomio $P(x)$ ***por*** $Q(x)$***:***

1. Escribimos el polinomio *P(x)* en forma decreciente y si el polinomio no es completo agregamos los términos faltantes multiplicados con coeficiente cero:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

2. Colocamos los coeficientes de *P(x)* de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

3. Como el divisor es $Q(x) = x - c$, consideramos el valor c:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ c & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

4. Bajamos el valor del coeficiente principal a_n:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ c & \downarrow & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

5. Realizamos multiplicaciones y sumas sucesivas con cada uno de los coeficientes hasta llegar al final:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ c & \downarrow & c \cdot a_n & & & & \\ \hline & a_n & a_{n-1} + c \cdot a_n & & & & \end{array}$$

6. El último número obtenido será el resto de la división y los anteriores a él serán los coeficientes del polinomio cociente.

Ejemplo: *Sean* $P(x)=2x^3-7x^2+5$ y $Q(x)=x-3$, realizar la división $P(x):Q(x)$ aplicando el método de Ruffini.

Para comenzar escribimos el polinomio *P(x)* en forma decreciente y si el polinomio no es completo agregamos los términos faltantes multiplicados por cero, así resulta:

$$\boldsymbol{P(x)=2x^3-7x^2+0x+5}$$

Como el divisor es $Q(x)=x-3$, tenemos el valor c = 3.

Realizamos la división con la ayuda de una tabla en la que colocamos en la primera fila los coeficientes del polinomio *P(x)* y a la izquierda de la línea vertical colocamos el valor de c. A continuación, describimos los cálculos que se realizan para completar la tabla y hallar así el cociente y el resto de la división.

1. El primer coeficiente de *P(x),* que en este caso es 2, se reescribe en la tercera fila, luego se multiplica por 3 y el resultado se coloca debajo del segundo coeficiente de *P(x).*

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & \downarrow & 6 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

2. Sumamos el segundo coeficiente con el valor que agregamos en el paso anterior y colocamos el resultado debajo de ambos en la tercera fila. Luego multiplicamos este último valor por 3 y colocamos el resultado en la segunda fila debajo del tercer coeficiente *P(x).*

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & \downarrow & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & -1 & & \end{array}$$

3. El proceso se sigue repitiendo hasta completar la tabla.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & \downarrow & 6 & -3 & -9 \\ \hline & \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{2 \quad -1 \quad -3}_{\textit{Coeficientes del polinomio}}} & \underbrace{-4}_{\textit{Resto}} \end{array}$$

El último valor en la tercera fila de la tabla es el *resto de la división*, en este caso es $\mathbf{R}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{4}$. Los demás valores son los *coeficientes del polinomio cociente* ordenados en forma decreciente. Así en este ejemplo resulta $\mathbf{C}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} - \mathbf{3}$. Finalmente se puede verificar que:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{R}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{x} - \mathbf{3}).(\mathbf{2}\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} - \mathbf{3}) - \mathbf{4}$$

Observación: El polinomio cociente, tiene un grado menos que el polinomio dividendo *P(x)* y el resto es una constante, es decir, el resto es el polinomio nulo o un polinomio de grado cero.

2.2.3 DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Definición: Si al dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio no nulo $Q(x)$, el resto es cero, se dice que el polinomio $P(x)$ **es divisible por el polinomio** $Q(x)$ o que $Q(x)$ **divide a** $P(x)$**.**

Ejemplo: Consideremos los siguientes polinomios: $P(x) = x^3 + 2x + 12$, $Q(x) = x - 2$, $\mathrm{R}(x) = x + 2$

(a) ¿Es *P(x)* divisible por *Q(x)*?

(b) ¿Es *P(x)* divisible por *R(x)*?

(Dejamos como tarea pensarlo)

¿Habrá alguna otra manera de saber si un polinomio es divisible por otro sin necesidad de realizar la división entera?

- Si el polinomio divisor es de grado igual o mayor a dos o es un polinomio de grado uno no mónico, se debe realizar la división entera entre los polinomios;
- Si el polinomio divisor es mónico y de grado 1, es posible determinar el resto de la división sin necesidad de efectuar la operación. El teorema siguiente lo explica:

2.2.4 TEOREMA DEL RESTO

El resto de la división entre un polinomio $P(x)$ y un binomio (polinomio) de la forma $(x-a)$, es igual al valor numérico del polinomio cuando x toma el valor "a", que podemos expresar como $P(a)$.

Volviendo a los polinomios *P(x), Q(x)* y *R(x)*, ¿es posible aplicar el teorema del resto? (Lo analizaremos en clase).

2.2.5 RAÍCES REALES DE UN POLINOMIO

Definición: Las **raíces de un polinomio** (también llamadas ceros de un polinomio) son los valores (números reales) para los cuales, el valor numérico del polinomio es igual a cero. Es decir, un valor *a* es una raíz de un polinomio si *P(a)=0*.

Ejemplo: Tenemos el siguiente polinomio: $P(x)=x^2+2x-8$

Hallemos el valor numérico del polinomio para cuando $x=\mathbf{1}$:

$$P(1)=1^2+2.1-8=1+2-8=-5\neq 0$$

Por lo tanto, **1 no es un cero o raíz del polinomio**.

Vamos a probar con $x=2$:

$$P(2)=2^2+2.2-8=4+4-8=0$$

Podemos concluir que **2 es un cero o raíz del polinomio** $P(\text{x})$

2.2.6 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Definición: **Factorizar un polinomio** significa poder expresarlo como producto de otros polinomios. En muchas ocasiones, factorizar un polinomio resulta útil para resolver ecuaciones, inecuaciones o simplificar expresiones algebraicas.

Para realizar este proceso, se aplican diversos recursos algebraicos, algunos de los cuales analizaremos a continuación.

Factor común

Una expresión algebraica es **factor común** de todos los términos de otra expresión cuando aparece repetida en cada uno de sus términos.

Para extraer factor común se debe proceder de manera inversa a la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma (o resta).

Primero se debe reconocer cuál es el factor que se encuentra repetido en cada término (considerando el menor exponente visible) y luego, para encontrar la expresión del factor que va entre paréntesis, se divide cada término de la expresión original por el factor común.

Observación: El polinomio que resulta quedar entre paréntesis al sacar factor común, debe tener igual número de términos que el polinomio original dado.

Ejemplos:

(a) Considerando el polinomio $R(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 5x$ se puede observar que se repite la indeterminada *x* en todos los términos. Seleccionamos entonces como factor común a *x* con el menor exponente visible, en este caso 1.

$$R(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 5x$$

$$= \boxed{x.\left(x^4 + 3x^2 - 2x - 5\right)}$$

(b) Considerando $Q(x) = 8x^2 - 4x^3 + 16x^4 + 12x^5$, descomponemos en primos los coeficientes y se selecciona aquel que se repita en todos los términos con el menor exponente visible (al igual que sucede con la letra).

$$Q(x) = 8x^2 - 4x^3 + 16x^4 + 12x^5$$

$$= 2^3 x^2 - 2^2 x^3 + 2^4 x^4 + 2^2 3 x^5$$

$$= 2^2 x^2.\left(2 - x + 4x^2 + 3x^3\right)$$

$$= \boxed{4x^2.\left(2 - x + 4x^2 + 3x^3\right)}$$

Trinomio cuadrado perfecto

Para factorizar un trinomio por este método, debemos corroborar que esta expresión algebraica de tres términos sea equivalente a un binomio elevado al cuadrado. Es decir, dos de sus términos deben ser cuadrados perfectos y el otro es el doble producto de las bases de esos cuadrados.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Ejemplos:

(a) Considerando el polinomio $x^2 + 8x + 16$, debemos ver si se tienen dos términos que sean cuadrados perfectos (hallando sus bases) y que el tercero sea el doble producto de las bases.

$$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(x)^2 \qquad (4)^2$$

$$2.x.4$$

(b) $x^4 + 1 - 2x^2 = (x^2 - 1)^2$

(c) $x^2 + 10x - 25$ no es trinomio cuadrado perfecto ya que -25 no es un cuadrado perfecto.

(d) $36x^2 + 1 - 12x = (6x - 1)^2$

Diferencia de cuadrados

Toda expresión algebraica que es diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la diferencia de las bases de dichos cuadrados por la suma de las mismas, es decir:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)}$$

Ejemplos:

(a) Considerando el polinomio $x^2 - 9$ observamos que se tiene una resta de dos cuadrados. Buscamos las bases y lo expresamos como una suma por diferencia:

$$x^2 - 9 = (x-3).(x+3)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$(x)^2 \ (3)^2$$

(b) $x^4 - 1 = (x^2 - 1).(x^2 + 1) = \boxed{(x-1).(x+1).(x^2+1)}$

(c) $x^2 - 5 = \boxed{(x-\sqrt{5}).(x+\sqrt{5})}$

(d) $81 - x^4 = (9 - x^2).(9 + x^2) = \boxed{(3-x).(3+x).(9+x^2)}$

Factorización de un Polinomio a partir de sus raíces

Recordemos que se llama **valor numérico** de un polinomio para $x = a$, y lo escribimos $P(a)$, al número que resulta al reemplazar la variable del polinomio por a y realizar todas las operaciones. Por el **Teorema del resto**, si $P(a) = 0$, decimos que a es **raíz del polinomio**.

<u>Definición</u>: Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x - a)$ sí y solo si, a es una raíz de $P(x)$.

Todo polinomio de una variable y de grado n que tenga n raíces reales puede expresarse de **forma factorizada** como:

$$P(x) = a_n.(x - x_1).(x - x_2)...(x - x_n)$$

Siendo a_n el coeficiente principal y $x_1, x_2 ... x_n$ sus raíces.

El **orden de multiplicidad** de una raíz en un polinomio es la cantidad de veces que aparece, en su expresión factorizada, el factor asociado a dicha raíz.

<u>Ejemplo</u>: Si $P(x) = 3.(x - 1).(x + 2)^3 .(x - 5)^2$, entonces 1 es raíz simple (o con orden de multiplicidad 1), -2 es raíz triple (o con orden de multiplicidad 3) y 5 es raíz doble (o con orden de multiplicidad 2).

<u>Observaciones</u>:

- Tener un polinomio escrito en forma factorizada nos facilita la tarea de encontrar sus raíces.
- Es importante observar que no todo polinomio tiene raíces reales, pues no siempre una ecuación de la forma *P(x)* = 0 tiene solución en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, el polinomio $P(x) = x^2 + 5$ no tiene ninguna raíz real, pues la ecuación *P(x)* = 0 no tiene soluciones reales.

Ejemplos: Expresar en forma factorizada a cada uno de los siguientes polinomios y determinar sus raíces reales.

(a) Consideremos el polinomio $P(x)=2x^4-8x^2$:

$$P(x)=2x^4-8x^2 \quad \rightarrow \textit{extraemos factor común } 2x^2$$

$$=2x^2\left(x^2-4\right) \quad \rightarrow \textit{aplicamos diferencia de cuadrados}$$

$$=2\boxed{x^2(x-2)(x+2)}$$

Las raíces reales de P son: 0 de orden de multiplicidad 2, 2 de orden de multiplicidad 1 y -2 de orden de multiplicidad 1.

(b) A partir del polinomio $Q(x)=x^4-2x^3+x^2$:

$$Q(x)=x^4-2x^3+x^2 \quad \rightarrow \textit{extraemos factor común } x^2$$

$$=x^2\left(x^2-2x+1\right) \quad \rightarrow \textit{aplicamos trinomio cuadrado perfecto}$$

$$=\boxed{x^2(x-1)^2}$$

Las raíces reales de Q son: 0 de orden de multiplicidad 2 y 1 de orden de multiplicidad 2.

(c) Considerando el polinomio $R(x)=2x^6-32x^2$ *:*

$$R(x)=2x^6-32x^2 \quad \rightarrow \textit{extraemos factor común } 2x^2$$

$$\rightarrow \textit{aplicamos diferencia de cuadrados}$$

$$=2x^2\left(x^4-16\right)$$

$$\rightarrow \textit{aplicamos nuevamente diferencia de cuadrados}$$

$$=2x^2\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)$$

$$=\boxed{2x^2(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}$$

Las raíces reales de R son: 0 de orden de multiplicidad 2, 2 de orden de multiplicidad 1 y -2 de orden de multiplicidad 1.

2.2.7 Guía de Actividades

1. Indicar si las siguientes expresiones son polinomios. En caso afirmativo, indicar su grado, coeficiente principal y término independiente.

a) $P(x)=2x-x^2$

b) $Q(x)=1$

c) $R(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

d) $T(x)=2\sqrt{x}+x^2-1$

e) $P(x)=2x^8+\pi$

2. Indicar si los polinomios están ordenados y/o completos. En caso de no estarlo, escribirlos ordenados y completos.

a) $P(x)=x^4-2x^3+x^2+5x-12$

b) $Q(x)=3+\dfrac{1}{2}x^3-5x+\dfrac{3}{2}x^2$

c) $S(x)=-5x-3+2x^2$

d) $T(x)=-1+4x^3$

e) $M(x)=x^3+\dfrac{1}{4}x^5-2$

3. Encontrar la especialización o valor numérico de los siguientes polinomios.

a) $P(x)=2x^3-4x^2+2x-3$ para $x=-1$

b) $S(x)=4x^2-5x+2$ para $x=0$

c) $Q(x)=x^4-x^2+5$ para $x=\dfrac{1}{2}$

4. Hallar el valor m ∈ R en los siguientes polinomios, para que se cumplan las condiciones indicadas en casa caso:

a) $P(x)=x^3+2x^2+x^2-mx \quad y \quad P(-1)=3$

b) $Q(x)=x^4-\dfrac{1}{3}x^2-m \quad y \quad Q(1)=2$

c) $S(x)=-x^2+3\sqrt{5}x-m \quad y \quad S\left(\sqrt{5}\right)=0$

5. Hallar $a\in\mathbb{R}$ de forma tal que la especialización de $F(x)=3x^4+ax^2-2x-5$ sea igual a 6 cuando x es igual al coeficiente principal del polinomio.

6. Dados los polinomios $P(x)=3x^3-5x+2$, $Q(x)=4x^2+x-1$ y $R(x)=2x-3$, **resolver** las siguientes operaciones y **escribir** al polinomio resultado ordenado en forma decreciente.

a) $P(x)+Q(x)$

b) $-2.P(x)+\frac{1}{2}.R(x)$

c) $[R(x)]^2-Q(x).x$

d) $P(x)-R(x)$

e) $P(x).R(x)+Q(x)$

7. Dados los polinomios $M(x)=2x^3-5x^2+x+6$ y $N(x)=\left(3x+\frac{1}{3}\right)^2$, **hallar** $P(x)$, sabiendo que $2.N(x)+P(x)=M(x)$.

8. Resolver las siguientes divisiones. **Indicar** el cociente y el resto de cada una y **realizar** la comprobación.

a) $\left(-x+4x^3-2x^6-x^4\right):\left(x^3+x+1\right)$

b) $\left(4x^4-6x^2+8\right):\left(x^2-4\right)$

c) $\left(x^7-2x^6-6x+1\right):\left(x^3+2x\right)$

9. Encontrar el polinomio $Q(x)$ sabiendo que: $3x^4-x^3-6x^2-5=Q(x).(x-1)+(3x-6)$

10. Hallar el polinomio dividendo $P(x)$ sabiendo que el resto es $R(x)=3x^2+x$, el cociente $C(x)=x^3.R(x)$ y el divisor $Q(x)$ es $Q(x)=x^4.R(x)$.

11. Resolver cada una de las siguientes divisiones; cuando sea posible aplicando la Regla de Ruffini. Luego, **escribir** el polinomio cociente $C(x)$ y el polinomio resto $R(x)$.

a) $\left(8x^2-3x+4\right):\left(x-4\right)$

b) $\left(x^3-3x-30\right):\left(x+2\right)$

c) $\left(4x^5+2x^3-x+6\right):\left(x^2+1\right)$

d) $\left(x^7-2x^6-6x+1\right):\left(x^3+2x\right)$

12. Determinar, justificando la respuesta, si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.

a) $P(x)=x^3-8$ y $Q(x)=x-2$

b) $P(x)=2x^7+3x^6+18x^3+29x+10$ y $Q(x)=x+1$

c) $P(x)=x^2-5x+6$ y $Q(x)=x-3$

13. Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $P(x)$ resulte divisible por $T(x)$.

a) $P(x) = x^3 + kx^2 + k + 4 \quad y \quad T(x) = x - 1$

b) $P(x) = kx^4 - 4x^3 + 16kx - 16 \quad y \quad T(x) = x + 2$

14. Determinar, en cada caso, cuáles de los números indicados son raíces del polinomio dado en cada caso:

a) $P(x) = 3x^2 + 5x - 2 \qquad x = -2, x = -1 \; y \; x = \frac{1}{3}$

b) $P(x) = -2x^3 + x^2 - x - 1 \qquad x = 2, x = -1 \; y \; x = -\frac{1}{2}$

15. A partir de la expresión factorizada de los siguientes polinomios, **determinar** grado, raíces y sus órdenes de multiplicidad. ¿Alguno de ellos es mónico?

a) $P(x) = 2.(x-5).(x+6)$

b) $P(x) = (x+3).(x+3).(x-2)$

c) $P(x) = -3.(x+1).(x+1).(x+1)$

d) $P(x) = x.(x-2)^5.(x+3)^2$

16. Expresar en forma factorizada a cada uno de los siguientes polinomios y **determinar** sus raíces reales.

a) $P(x) = x^3 - 4x$

b) $P(x) = 25x^4 + 10x^3 - 5x^2$

c) $P(x) = x^4 + 1 + 2x^2$

d) $P(x) = x^2 - 10x + 25$

e) $P(x) = 3x^2 - 15$

f) $P(x) = x^5 + 20x^3 + 100x$

g) $P(x) = 19x^4 - 4x^4$

h) $P(x) = (x^4 - 18x^2 + 81).(x^5 + 4x^3)$

i) $P(x) = x^4 - 1$

2.3 Ecuaciones

Una ecuación es una propuesta de igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparece un valor desconocido llamado incógnita.

Resolver una ecuación significa encontrar, si existe, el valor o los valores reales de esta incógnita, que hacen verdadera la igualdad. Esto quiere decir, que al resolver una ecuación puede ocurrir que tenga:

- **Única solución real.**
- **Varias soluciones reales, incluso infinitas.**
- **Ninguna solución real.**

A través de los ejemplos siguientes analicemos las distintas soluciones nombradas.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $3(2x^3+1)=\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$ y analizar su conjunto solución.

$$6x^3+3=\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$$

$$6x^3+3=\frac{1}{7}x^3+\frac{6}{7}$$

$$\frac{41}{7}x^3=-\frac{15}{7}$$

$$x^3=-\frac{15}{41}$$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{15}{41}}$$

Entonces, $S=\left\{\sqrt[3]{-\frac{15}{41}}\right\}$

Esta ecuación tiene una única solución en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2: Al operar algebraicamente sobre la igualdad siguiente, resulta que

$$7-\frac{5}{2}(4-x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}x$$

$$7 - 10 + \frac{5}{2}x = 2x - 3 + \frac{1}{2}x$$

$$-3 + \frac{5}{2}x = \frac{5}{2}x - 3$$

$$0 = 0$$

La ecuación es válida para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$, esto implica que el conjunto solución es el conjunto de los números reales.

Entonces, $S = \mathbb{R}$

<u>Ejemplo 3</u>: La siguiente ecuación no tiene solución real, veamos por qué.

$$\left(z + \sqrt{7}\right)^2 - \sqrt{7}z = \sqrt{7}z$$

$$z^2 + 2\sqrt{7}z + 7 - \sqrt{7}z = \sqrt{7}z$$

$$z^2 + \sqrt{7}z + 7 = \sqrt{7}z$$

$$z^2 + 7 = 0$$

$$z^2 = -7$$

No existe ningún valor real de z tal que $z^2 = -7$ porque $z^2 \geq 0$ para $z \in \mathbb{R}$.
La ecuación no tiene solución real.

Entonces, $S = \emptyset$

Si una ecuación tiene solución, se puede realizar la <u>verificación</u>; es la manera de comprobar si lo hecho está bien o no.

2.3.1 Las propiedades siguientes son de gran utilidad en la resolución de ecuaciones.

Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$

Es decir, cuando el producto de dos números es cero, al menos uno de ellos, es cero.

Si $\frac{a}{b} = 0$ entonces $a = 0$ y $b \neq 0$

Los valores que anulan al cociente son los que anulan al numerador, pero no al denominador, ya que éste debe ser distinto de cero.

Ejemplos:

1) $x\,(3x+2) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \quad ó \quad 3x + 2 = 0$

$$x = -\frac{2}{3} \qquad\qquad \therefore\; S = \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$$

2) $(x+7)(5-x)\left(\sqrt{3}-4x\right) = 0 \;\rightarrow\; x + 7 = 0 \quad ó \quad 5 - x = 0 \quad ó \quad \sqrt{3} - 4x = 0$

$$x = -7 \qquad 5 = x \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore\; S = \left\{-7, 5, \frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$$

3) $\frac{3-2x}{x+2} = 0 \;\leftrightarrow\; 3 - 2x = 0 \quad y \quad x + 2 \neq 0$

$$x = \frac{3}{2} \quad y \quad x \neq -2 \qquad\qquad \therefore\; S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

4) $\frac{2-2(x-1)}{-2x+4} = 0 \;\leftrightarrow\; 2 - 2(x-1) = 0 \quad y \quad -2x + 4 \neq 0$

$$2 = 2(x-1) \qquad\qquad 4 \neq 2x$$

$$2 = 2x - 2 \qquad\qquad 2 \neq x$$

$$2 = x$$

En esta resolución se puede observar que el valor real 2, anula al numerador pero también al denominador, por lo tanto, esta ecuación no tiene solución.

Entonces, $\boldsymbol{S} = \emptyset$

¿Qué pasa cuando hay que resolver una ecuación que NO está igualada a 0?

Se muestra con el ejemplo siguiente:

$$\frac{4}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{26}{x^2-1}$$

Vamos con la resolución:

$$\frac{4}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{26}{x^2-1} = 0$$

$$\frac{4}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{26}{(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\frac{4(x+1) + 2(x-1) - 26}{(x-1)(x+1)} = 0 \quad \leftrightarrow$$

$$4(x+1) + 2(x-1) - 26 = 0 \quad y \quad (x-1)(x+1) \neq 0$$

$$4x + 4 + 2x - 2 - 26 = 0 \quad y \quad (x-1)(x+1) \neq 0$$

$$6x - 24 = 0 \quad y \quad x \neq 1\,, \ x \neq -1$$

$$x = 4 \quad y \quad x \neq 1\,, \ x \neq -1$$

$\therefore \ \boldsymbol{S} = \{4\}$

2.3.2 Guía de Actividades

1. Analizar, debatir y decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas, justificando la decisión.

a) $x = \frac{1}{2}$ es solución de la ecuación $2x^3 - 2x - 1 = x^2$.

b) La ecuación $2x - 3(x - 1) = 1 - x$ tiene infinitas soluciones reales.

c) La ecuación $3(x + 1) - 2 = 5x - 3 - 2(x - 2)$ no tiene solución.

d) La solución de la ecuación $\frac{1}{3}\left(x + \sqrt{3}\right)^2 = 27 - \frac{6 - x^2}{3}$ es un número real no racional.

2. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones. En caso que tenga solución (soluciones), si es posible, **realizar** la verificación.

a) $\frac{x+1}{x^2 - 1} = 0$ b) $\frac{(2x-3)\,(x-2)}{2-x} = 0$ c) $\frac{\left(8x^2 + 4x\right)\,(2x-1)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)\,(x+3)} = 0$

d) $\frac{5x+10}{x+3} = 4$ e) $\frac{3}{8} + \frac{1}{2x} = \frac{2}{x}$ f) $\frac{2x+1}{x+3} = 1 + \frac{x+3}{x-1}$

g) $\frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} = \frac{(2x)^2}{x^2 - 16}$ h) $\frac{5x-3}{4-x^2} = \frac{5+x}{2+x} + \frac{x-3}{2-x}$

3. En cada caso **redondear** la o las respuestas correctas. **Justificar la respuesta**.

a) Las soluciones de la ecuación $\left(-\sqrt{x} + 4\right)\left(\sqrt{7}x - 1\right)(5 + x) = 0$ son:

i) *Tres números racionales*.

ii) *Dos números racionales y un número irracional*.

iii) *Dos números irracionales y un número racional*.

iv) *Tres números irracionales*.

b) La ecuación $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{3}\,x = \sqrt{3}\,x$ tiene:

i) *Una única solución real.* **ii)** *Dos soluciones reales.*

iii) *No tiene solución real.* **iv)** *Tiene infinitas soluciones reales.*

2.4 Inecuaciones

Las inecuaciones son expresiones algebraicas que establecen una relación de desigualdad en las que aparece un valor desconocido, llamado incógnita.

La solución de una inecuación, si existe, es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

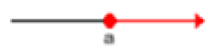
Si existen valores reales que verifican la inecuación, entonces expresaremos su solución en notación de intervalo (o de unión de intervalos).

Si ningún valor real verifica la inecuación, entonces el subconjunto solución es el conjunto vacío, que indicamos $\emptyset$.

En algunos casos la solución de una inecuación es un único punto. En tales situaciones no utilizamos la notación de intervalos para escribir la solución. Por ejemplo, la única solución de $\boldsymbol{x^2 \leqslant 0}$ es $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{0}\}$.

La tabla siguiente resume los diferentes tipos de intervalos.

INTERVALOS EN LA RECTA REAL

NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	REPRESENTACIÓN
Intervalo abierto	(a,b)	$\{ x / a < x < b \}$ Nº comprendidos entre a y b	
Intervalo cerrado	[a,b]	$\{ x / a \leq x \leq b \}$ Nº comprendidos entre a y b, éstos incluidos.	
Intervalo semiabierto	(a,b]	$\{ x / a < x \leq b \}$ Nº comprendidos entre a y b, incluido b	
	[a,b)	$\{ x / a \leq x < b \}$ Nº comprendidos entre a y b, incluido a	
	(-∞,a)	$\{ x / x < a \}$ Números menores que a	
	(-∞,a]	$\{ x / x \leq a \}$ Nº menores o iguales que a	
	(a,∞)	$\{ x / a < x \}$ Números mayores que a	
	[a,∞)	$\{ x / a \leq x \}$ Nº mayores o iguales que a	

Además, para la resolución de inecuaciones se debe considerar algunas propiedades sobre las desigualdades:

Algunas propiedades de las desigualdades, necesarias para resolver las inecuaciones.

Sean a y b $\in$ R , con $a < b$ se verifica:

(a) $a + k < b + k$ $\quad \forall \; k \in R$

(b) $a \,.\, k < b \,.\, k$ $\quad$ si $k > 0$

(c) $a \,.\, k > b \,.\, k$ $\quad$ si $k < 0$

(d) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ $\quad a \neq 0,\ b \neq 0$

Para resolver inecuaciones son válidos los mismos pasos que para resolver ecuaciones, la única diferencia es que, cuando una incógnita está multiplicada por un número negativo se invierte el sentido de la desigualdad.

<u>Ejemplos</u>: Resolver las siguientes inecuaciones y escribir su conjunto solución.

1) $3x + 4 \leq 10$

$3x \leq 6$

$x \leq 2$

$\therefore \quad S = (-\infty, 2]$

2) $x + \frac{1}{5}\,x > 2\,x + 3$

$\frac{6}{5}x > 2\,x + 3$

$-\frac{4}{5}x > 3$

$x < -\frac{15}{4} \qquad \therefore \quad S = \left(-\infty, -\frac{15}{4}\right)$

3) $2x + 1 \leq 2(4 + x)$

$2x + 1 \leq 8 + 2x$

$1 \leq 8$

La desigualdad se verifica para todo número real.

$\therefore \quad S = (-\infty, +\infty)$

4) $-3x - 5 > \frac{1}{2}(7 - 6x)$

$-3x - 5 > \frac{7}{2} - 3x$

$-5 > \frac{7}{2}$

La desigualdad no se cumple nunca.

$\therefore \quad S = \emptyset$

¡Revisamos lo aprendido!

Resolvé las inecuaciones siguientes y escribí el conjunto solución.

$$3 - (x + 1) \leq \frac{1 - 2x}{2}$$

$$\sqrt{12}x + 8 \geq \frac{6}{\sqrt{3}}\left(x - \sqrt{3}\right)$$

Hay inecuaciones que requieren aplicar otra estrategia para su resolución. Realizaremos un procedimiento denominado ***análisis de signos***.

Se dejan propuestas las siguientes inecuaciones cuyo desarrollo se realizará en clase.

$(x + 1)(x - 2) \leq 0$	$x^4 \leq x^2$
$(x + 3)^2 (x - 1) > 0$	$\frac{x + 1}{2 - x} \geq 1$
$\frac{x + 2}{1 - x} < 0$	$\frac{1}{3 - x} - \frac{1}{2x} < \frac{2 + x}{2x(3 - x)}$

2.4.1 Guía de Actividades

1. Sea $\mathbf{2x - 3 < 3(2 - x) + 1}$ una inecuación. **Determinar** si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando claramente la decisión.

a) La solución es $S = (2, +\infty)$.

b) $x = \frac{7}{2}$ es una solución.

c) Cualquier número real menor que 2 es solución de la inecuación.

2. Resolver las siguientes inecuaciones, **expresar** la solución en notación de intervalos (si es posible) y **representarla** en la recta real.

a) $10 - \frac{5}{2}x \geq 0$

b) $-3x + 1 \leq 5(x - 3) + 2$

c) $\frac{34 - 2x}{3} - 9 < \frac{3x + 8}{4} - x$

d) $x - 7 > 2(x - 1) - (3 - 2x)$

3. Resolver las siguientes inecuaciones y **expresar** el conjunto solución en notación de intervalos (si es posible).

a) $(2x - 1)(x - 5) \geq 0$

b) $-3x(1 - x) < 0$

c) $(x - 2x^2)\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 0$

d) $x^4 \geq 9x^2$

e) $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$

f) $\frac{2}{x - 4} \geq 1$

g) $\frac{1}{x + 3} \leq \frac{1}{4 - x}$

h) $\frac{(5 - x)(x - 2)}{x^2} \geq 0$

2.5 Ecuaciones e Inecuaciones con valor absoluto

2.5.1 Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver ecuaciones de este tipo hay dos formas posibles. Ellas son:

- **Mediante la definición de valor absoluto.**
- **A través de la noción de distancia.**

La primera forma se puede usar siempre pero con la precaución que debe estar escrita de manera completa y ordenada. La segunda forma mencionada, *siempre que se pueda usar*, es sencilla de aplicar y muy útil.

Los ejemplos que se desarrollan a continuación darán cuenta de lo explicado en el párrafo anterior.

Ejemplo 1: **Resolver la ecuación $|\ x-2\ | = 4$ y escribir su conjunto solución.**

- **Mediante la definición de valor absoluto**

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si \quad x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & si \quad x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & si \quad x \geq 2 \\ -(x-2) & si \quad x < 2 \end{cases}$$

$Si\ \ x \geq 2$:

$$x - 2 = 4$$

$$x = 6$$

$$S_1 = \{6\}$$

$Si\ \ x < 2$:

$$-(x-2) = 4$$

$$x - 2 = -4$$

$$x = -2$$

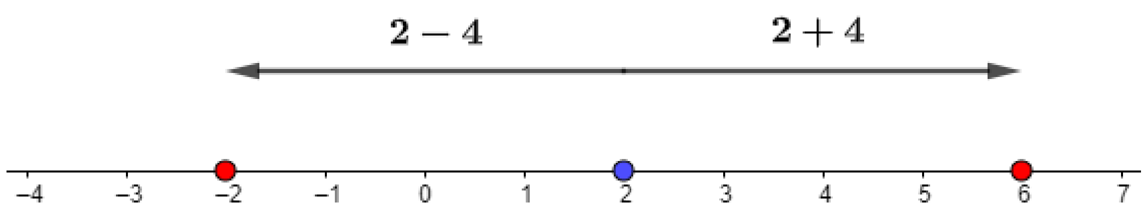
$$S_2 = \{-2\}$$

Luego, $S = S_1 \cup S_2 = \{-2\ ;\ 6\}$

- **Noción de distancia:**

$$|\ x-2\ | = 4 \quad \leftrightarrow \quad d(x\,,2) = 4$$

Hay que posicionarse en 2 y desde allí, desplazarse 4 unidades hacia la derecha de 2 y 4 unidades hacia la izquierda de 2.



Luego, $\boldsymbol{S} = \{-\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{6}\}$

Ejemplo 2: **Resolver la ecuación $|\ x + 4\ | = 5$ y escribir su conjunto solución.**

- **Mediante la definición de valor absoluto:**

$$|x\ +\ 4| = \begin{cases} x+4 & si \quad x+4 \geq 0 \\ -(x+4) & si \quad x+4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+4 & si \quad x \geq -4 \\ -(x+4) & si \quad x < -4 \end{cases}$$

$\boldsymbol{Si\ \ x \geq -4}$:

$$x + 4 = 5$$

$$x = 1$$

$$S_1 = \{1\}$$

$\boldsymbol{Si\ \ x < -4}$:

$$-(x+4) = 5$$

$$x + 4 = -5$$

$$x = -9$$

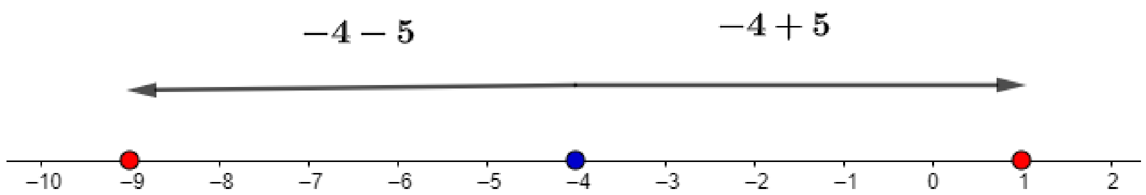
$$S_2 = \{-9\}$$

Luego, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} \cup \boldsymbol{S_2} = \{-\mathbf{9}\ ;\ \mathbf{1}\}$

- **Noción de distancia:**

$$|\ x + 4\ | = 5 \ \rightarrow\ |\ x - (-4)\ | = 5 \ \leftrightarrow\ d(x\,,-4) = 5$$

Hay que posicionarse en -4 y desde allí, desplazarse 5 unidades hacia la derecha de -4 y 5 unidades hacia la izquierda de -4.



Luego, $\boldsymbol{S} = \{-\mathbf{9}\,;\ \mathbf{1}\}$

Ejemplo 3: **Resolver la ecuación $|\ 3 - x\ | = 6$ y escribir su conjunto solución.**

Recordando que la interpretación geométrica del valor absoluto se asocia a la noción de distancia, y en particular, como se menciona en **1.6.3**, distancia entre dos números, se sabe que $|\ 3 - x\ | = |\ x - 3\ |$

➢ **Mediante la definición de valor absoluto**

$$|x-3| = \begin{cases} \boldsymbol{x-3} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x-3 \geq 0} \\ -(\boldsymbol{x-3}) & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x-3} < 0 \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{x-3} & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x \geq 3} \\ -(\boldsymbol{x-3}) & \boldsymbol{si} \quad \boldsymbol{x < 3} \end{cases}$$

$\boldsymbol{Si}\ \boldsymbol{x \geq 3}$:

$$\boldsymbol{x - 3 = 6}$$

$$\boldsymbol{x = 9}$$

$$\boldsymbol{S_1} = \{\mathbf{9}\}$$

$\boldsymbol{Si}\ \boldsymbol{x < 3}$:

$$-(\boldsymbol{x-3}) = \mathbf{6}$$

$$\boldsymbol{x - 3 = -6}$$

$$\boldsymbol{x = -3}$$

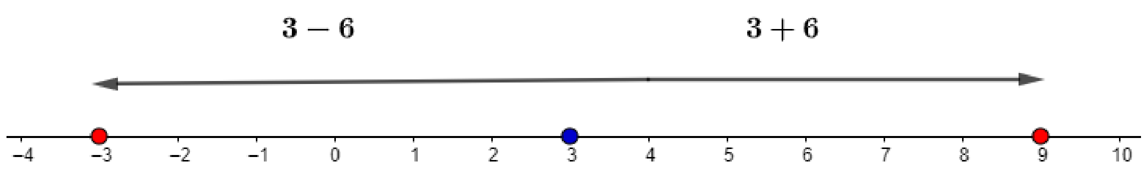
$$\boldsymbol{S_2} = \{-\mathbf{3}\}$$

Luego, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} \cup \boldsymbol{S_2} = \{-\mathbf{3}\,;\ \mathbf{9}\}$

➢ **Noción de distancia:**

$$|\ \boldsymbol{x - 3}\ | = \mathbf{6} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{d(x\,,3)} = \mathbf{6}$$

Hay que posicionarse en 3 y desde allí, desplazarse 6 unidades hacia la derecha de 3 y 6 unidades hacia la izquierda de 3.



Luego, $\boldsymbol{S} = \{-\mathbf{3}\,;\ \mathbf{9}\}$

Ejemplo 4: Resolver la ecuación $|\ 2x - 1\ | = 5$ y escribir su conjunto solución. ***Se desarrollará en clase.***

Ejemplo 5: Resolver la ecuación $|\ 5x + 3\ | = 7$ y escribir su conjunto solución. ***Se desarrollará en clase.***

¿Es cierto que $3|x-2| = 0$ tiene una única solución? Justificar la respuesta.

2.5.2 Inecuaciones con valor absoluto

Cuando se deben resolver inecuaciones con valor absoluto, al igual en las ecuaciones, se puede realizar mediante la noción de distancia o a través de propiedades.

Propiedad 1:

Sea $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{+}$**. Si** $|\boldsymbol{x}| < r$ **entonces** $-\boldsymbol{r} < x < r$**.**

Sea $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{+}$**. Si** $|\boldsymbol{x}| \leq \boldsymbol{r}$ **entonces** $-\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{r}$**.**

Propiedad 2:

Sea $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{+}$**. Si** $|\boldsymbol{x}| > r$ **entonces** $\boldsymbol{x} > r$ ó $x < -r$**.**

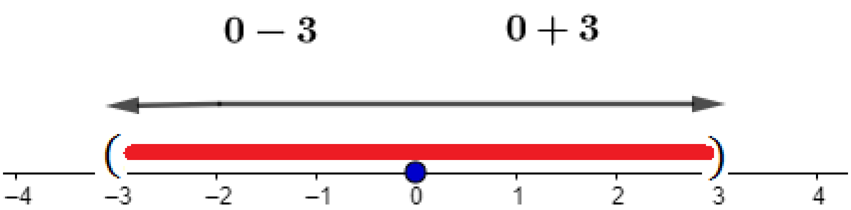
Sea $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{+}$**. Si** $|\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{r}$ **entonces** $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{r}$ ó $\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{r}$**.**

Analicemos los ejemplos de diferentes inecuaciones mediante los dos procedimientos nombrados:

Ejemplo 1: $|\boldsymbol{x}| < 3$

- **Noción de distancia:**

$$|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{0}| = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) < 3$$



Luego, $\boldsymbol{S} = (-\boldsymbol{3}, \boldsymbol{3})$

- **Por propiedad 1:**

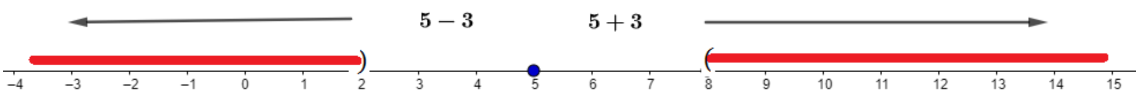
$$|\boldsymbol{x}| < 3 \qquad \leftrightarrow \qquad -\boldsymbol{3} < x < 3$$

Luego, $\boldsymbol{S} = (-\boldsymbol{3}, \boldsymbol{3})$

Ejemplo 2: $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{5}| > 3$

- **Noción de distancia:**

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{5}| = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{5}) > 3$$



Luego, $\boldsymbol{S} = (-\infty, \boldsymbol{2}) \cup (\boldsymbol{8}, +\infty)$

- **Por propiedad 2:**

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{5}| > 3 \qquad \leftrightarrow \qquad x - 5 > 3 \quad \text{ó} \quad x - 5 < -3$$

$$\boldsymbol{x} > 8 \quad \text{ó} \quad x < 2$$

Luego, $\boldsymbol{S} = (-\infty, \mathbf{2}) \cup (\mathbf{8}, +\infty)$

¿Se modifica la solución de las inecuaciones anteriores si fuese $\leq$ y $\geq$ respectivamente?

Ejemplo 3: **Resolver la inecuación $|\, \mathbf{2 - 3x} \,| \leq \mathbf{6}$ y escribir su conjunto solución.** ***Se desarrollará en clase.***

Ejemplo 4: **Resolver la inecuación $|\, \mathbf{-7x + 1} \,| \geq \mathbf{6}$ y escribir su conjunto solución.** ***Se desarrollará en clase.***

2.5.3 Guía de Actividades

1. Determinar, si existen, los valores reales de la incógnita que satisfacen las siguientes igualdades.

a) $\left|\frac{1}{3}\,x\right| = 0$

b) $\left|x - \frac{1}{2}\right| = 4$

c) $|x| = -1$

d) $|5x + 2| = \frac{1}{4}$

2. Resolver las inecuaciones siguientes y **escribir** el conjunto solución en notación de intervalos.

a) $|x| < \frac{3}{8}$

b) $\left|x - \frac{5}{2}\right| < 7$

c) $|3x + 4| \geq 5$

d) $\left|x + \frac{1}{4}\right| < -6$

e) $5 - |3x - 6| < -1$

FUNCIONES

3.1 Consideraciones generales sobre las funciones de variable real

3.1.1 Variables

Una ***variable*** es una propiedad o atributo que puede tomar uno o varios valores dados por los **elementos** de un **conjunto**. Por ejemplo, la variable “Estado civil de una persona” toma valores en el conjunto cuyos elementos son: soltero/a, casado/a, viudo/a, divorciado/a, etc.

Además, distintas variables pueden relacionarse entre sí: la altura de una persona se relaciona con la edad de la misma, la tarifa del plan de celular se relaciona con la cantidad de gigas para navegar ofrecidos, el precio de enviar un paquete por correo se relaciona con el peso del mismo.

Tabla de Tarifas Correo Argentino
45 Feria Internacional del Libro
3, 4 y 5 de mayo de 2019

	Nacionales Tarifario CORREO
Hasta 1 kg	420
Hasta 5 kg	515
Hasta 10 kg	685
Hasta 15 kg	845
Hasta 20 kg	995
Hasta 25 kg	1185

Observemos que en los ejemplos anteriores una de las variables depende de la otra: el precio de enviar por Correo Argentino un paquete de libros durante la Feria del Libro **depende** del peso del mismo, por lo que diremos que el *precio* es una **variable dependiente**, mientras que el *peso del paquete* es una **variable independiente,** pues podemos asignarle cualquier valor dentro de un rango razonable para el problema.

En los distintos campos del conocimiento y de la experiencia, encontramos pares de variables relacionadas entre sí, de forma tal de que el valor de una de ellas depende del valor de la otra. Cuando el conjunto de los valores posibles de una variable es un subconjunto de los números reales, se le denomina **variable real**.

3.1.2 Funciones. Concepto. Dominio e Imagen

Consideremos dos conjuntos cualesquiera, llamados A y B. Una **función** f de A en B, que notaremos $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, es una relación entre elementos de esos conjuntos que verifica que ***a cada elemento del conjunto A le asigna un único elemento del conjunto B***.

El conjunto A se llama **dominio** de la función, el conjunto B se denomina **codominio** o rango de f y el conjunto formado por aquellos elementos de B que se relacionan con algún elemento de A se llama **imagen** de la función.

Función Real de Variable Real

Cuando los conjuntos A y B sean los números reales o algún subconjunto de ellos diremos que trabajamos con una ***función real de variable real***.

Si $\boldsymbol{x}$ es la variable que toma como valores elementos del conjunto A e $\boldsymbol{y}$ es la variable que toma como valores elementos del conjunto B y, además, tenemos una fórmula para esta función, solemos escribir:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

que se lee: "*y está en función de x*" o "*y es una función de x*".

Observaciones:

1. Como el valor que toma y depende del valor elegido para x, diremos que x es la variable independiente e y es la variable dependiente.
2. El dominio de la función f que notamos $Dom(f) = A$ es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x. Mientras que la imagen de la función que notaremos $Im(f)$ es el conjunto de valores de B que resulta para la variable y. Por lo tanto decimos que la imagen de la función es un subconjunto del codominio B y lo notamos: $Im(f) \subseteq B$.

Ejemplo: Consideremos la relación entre variables reales determinada por la siguiente regla

$$y = \sqrt{x}$$

En efecto, se trata de una función, dado que para cada valor de la variable real x existe un único valor de la variable y. Podemos definir entonces la función:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \sqrt{x}$$

¿Cuál es el dominio de la función f? ¿Por qué?

¿Cuál es el codominio de la función f? ¿Por qué?

¿Cuál es la imagen de la función f?

3.1.3 Gráficas de funciones

Si f es una función con dominio D entonces la **gráfica** de f se forma con el conjunto de pares ordendos:

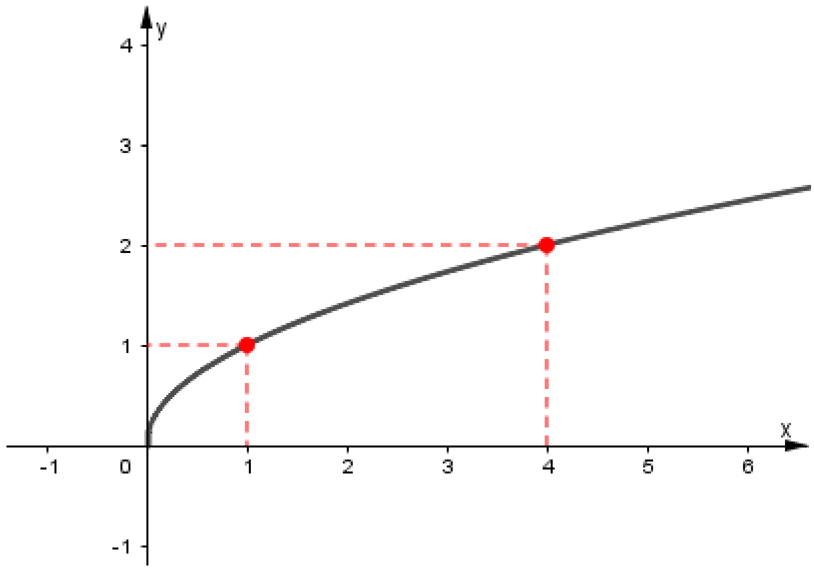
$$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}\}$$

Entonces si conocemos un par de valores para x e y que verifiquen que $y = f(x)$ diremos que el punto de coordenadas (x, y) será un punto de la gráfica de la función f.

Los valores que tome la variable independiente, los representaremos sobre el eje horizontal, llamado **eje de las abscisas** y los valores que tome la variable dependiente sobre el eje vertical, llamado **eje de las ordenadas**.

Para el ejemplo anterior tenemos:

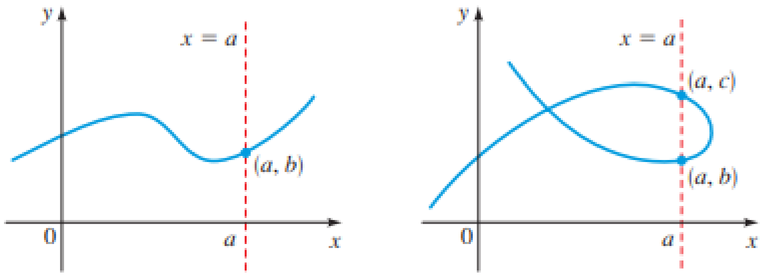
$$y = \sqrt{x}$$



Observemos que $f(1) = \sqrt{1} = 1$ y $f(4) = \sqrt{4} = 2$ entonces $(1,1)$ y $(4,2)$ son puntos en la gráfica de f.

Prueba de la recta vertical

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿Cuáles curvas del plano xy son gráficas de funciones? Esto puede analizarse gráficamente mediante la *"Prueba de la recta vertical"* que nos dice que *una curva en el plano de coordenadas cartesianas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical intersecta a la curva en más de un punto.*



Gráfica de una función

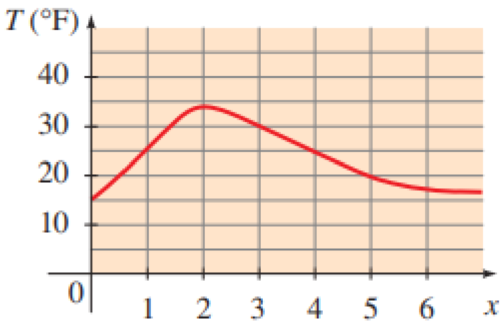
No es la gráfica de una función

¿Qué información obtenemos de la gráfica de una función?

A partir de la representación gráfica de una función $y = f(x)$, podemos obtener información sobre su comportamiento.

Analicemos el siguiente ejemplo:

La función T graficada debajo da la temperatura entre el mediodía y las 6:00 p.m. en cierta estación meteorológica.



a) Encontrar T(1), T(3) y T(5).

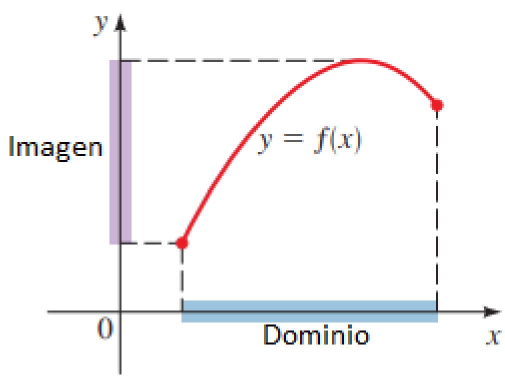
b) ¿Cuál es mayor, T(2) o T(4)?

c) Encontrar el (los) valor(es) de x para los que T(x)=25.

d) Encontrar el (los) valor(es) de x para los que T(x) ≥ 25.

Además, podemos observar su **dominio**, **imagen**, **intervalos de crecimiento y de decrecimiento** y **extremos locales**.

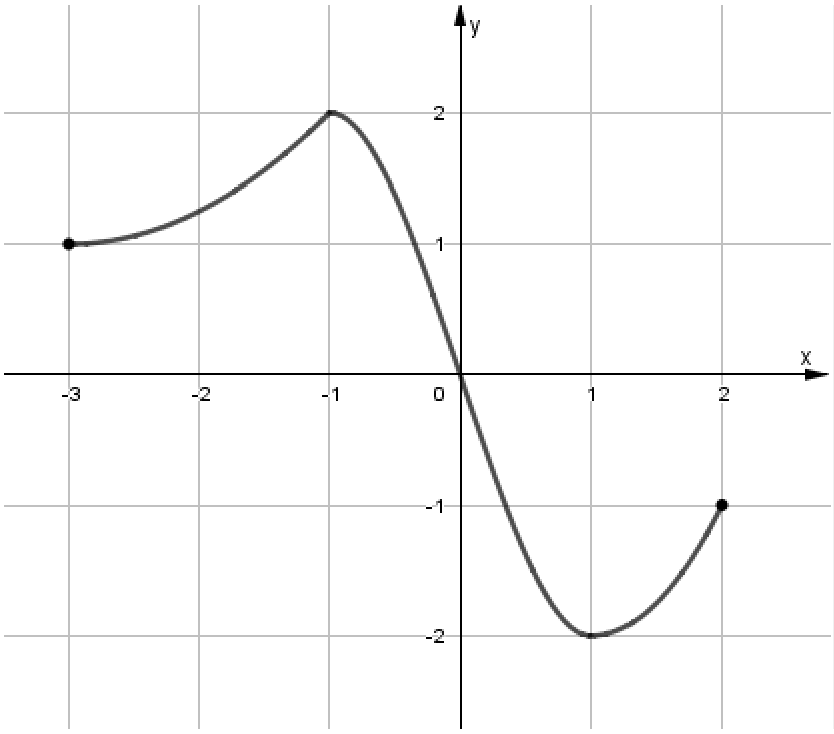
- El **dominio** lo observamos al proyectar la gráfica de la función sobre el eje de las abscisas. Mientras que el conjunto **imagen** lo leemos proyectando la gráfica de la función sobre el eje de las ordenadas.



- Una función f **crece** en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, para todos x_1, x_2 en I.
  Una función f **decrece** en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, para todos x_1, x_2 en I.

- Una función f alcanza un mínimo local en x_1 si $f(x_1) \leq f(x)$ para todos los valores de x “próximos” a x_1.
  Una función f alcanza un máximo local en x_2 si $f(x_2) \geq f(x)$ para todos los valores de x “próximos” a x_2.

Analizaremos en clase el siguiente ejemplo de la función $y = f(x)$:



3.1.4 Guía de Actividades

1. Completar los siguientes enunciados:

a) Si una función f está dada por la fórmula $y = f(x)$, entonces $f(a)$ es la ____________de f en $x = a$.
b) Para una función f, el conjunto de todos los valores que pueden reemplazarse en su fórmula se denomina ___________ de f, y el conjunto de todos los resultados al reemplazar por cierto valor y operar algebraicamente se denomina ____________ de f.
c) Dada $f(x) = x^3 + 2$, el punto (2,___) está sobre su gráfi ca.

2.
a) ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen al valor 5 en sus dominios?

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = \frac{x-5}{x} \qquad h(x) = \sqrt{x-10}$$

b) Para las funciones del inciso anterior que tienen al valor 5 en su dominio, encontrar la imagen por la función en 5.

3. Evaluar la función en los valores indicados:

a) $f(x) = x^2 - 6 \quad f(-3),\ f(3),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right),\ f(10)$
b) $g(x) = 2x + 1 \quad g(1),\ g(-2),\ g\left(\frac{1}{2}\right),\ g(a),\ g(-a),\ g(a+b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.

4. El costo C en dólares por producir x metros de cierta tela está dado por la función $C(x) = 1500 + 3x + 0{,}02x^2 + 0{,}0001x^3$.
a) Encontrar $C(10)$ y $C(100)$.
b) ¿Qué representan las respuestas dadas en el inciso anterior considerando la información que brinda el enunciado?
c) Encontrar $C(0)$. (Este número representa los costos fijos de producción).

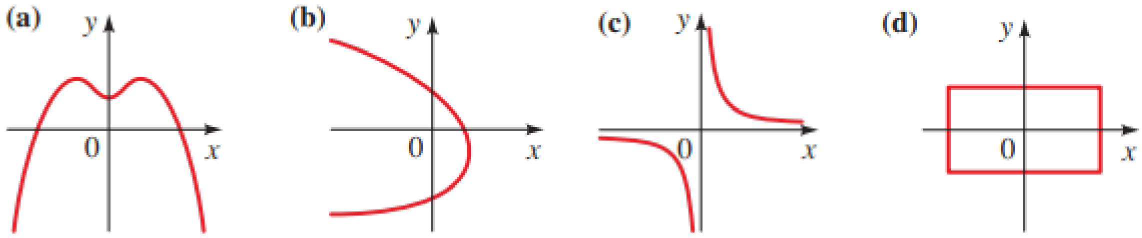
5. El área superficial S de una esfera es una función de su radio r dada por $S(r) = 4\pi r^2$. Encontrar $S(2)$ e interpretar este resultado en el contexto del problema.

6. Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia D máxima que se puede ver desde la parte superior de un edificio alto o un avión a una altitud h está dada por la función

$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h se miden en millas.
a) Encontrar D(0.1) y D(0.2).
b) ¿A qué distancia se puede ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, a 1135 pies del suelo?
c) Los aviones comerciales vuelan a una altitud de unas 7 millas. ¿A qué distancia puede ver el piloto?

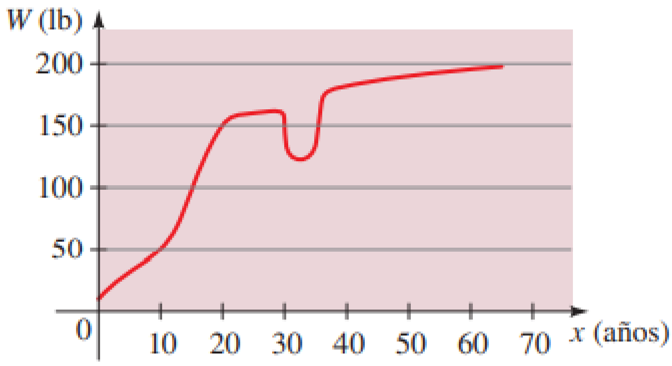
7. Usar la prueba de la recta vertical para evaluar si las siguientes curvas corresponden a la gráfica de una función de x:



8. La gráfica da el peso W de una persona a la edad x.

a) Determinar los intervalos en los que la función W es creciente y aquellos en los que es decreciente.

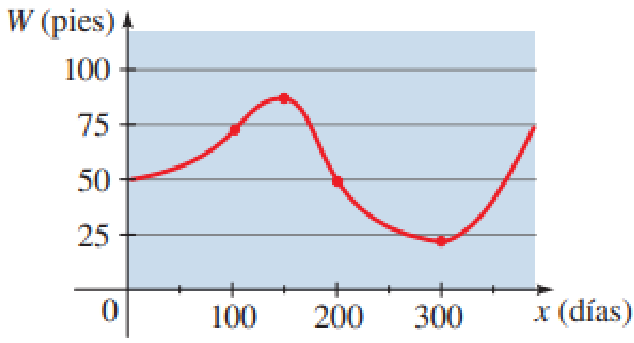
b) ¿Qué ocurrió cuando esta persona tenía 30 años de edad?



9. La gráfica muestra la profundidad del agua W en un depósito en un período de un año, como función del número de días x desde el principio del año.

a) Determinar los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.

b) ¿En qué valor de x alcanza W un máximo local? ¿Un mínimo local? ¿Qué significan estos resultados en el contexto del problema?



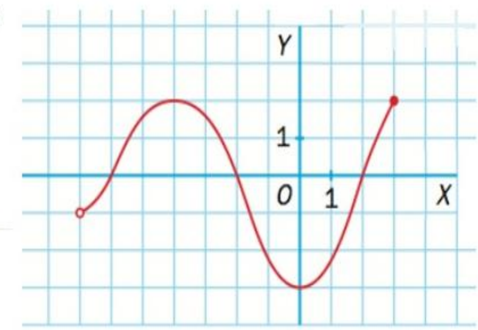
10. A partir de las siguientes representaciones gráficas de funciones, determinar si es posible:

i. Dominio e Imagen.

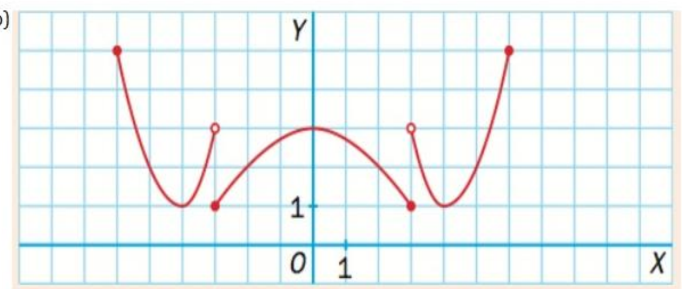
ii. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

iii. Máximos y mínimos locales.

a)



b)



3.2. FUNCION LINEAL

3.2.1 Definición

Una función lineal es una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = ax + b}}$$

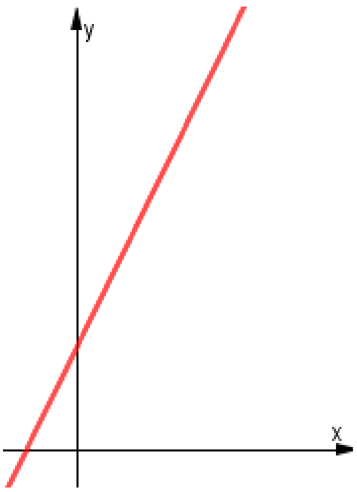
donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$ es una función lineal.

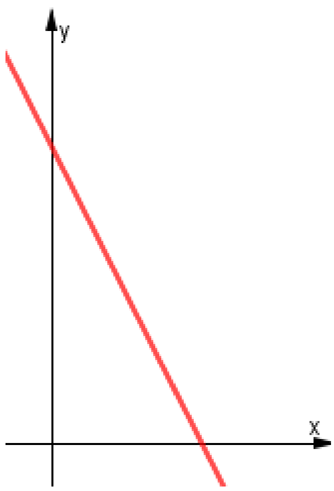
El gráfico en el plano cartesiano de una función lineal es una **RECTA NO VERTICAL**.

Analicemos: **¿Por qué una recta vertical no puede ser la gráfica de una función lineal?**

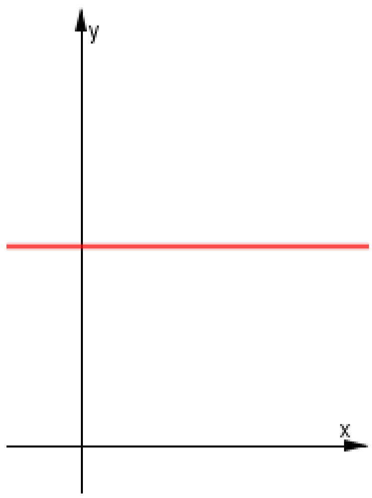
- El coeficiente a es la **pendiente** de la recta y mide la inclinación de la misma.
  - Si $a > 0$ la recta es creciente.
  - Si $a < 0$ la recta es decreciente.
  - Si $a = 0$ la recta es constante (paralela al eje de las abscisas o eje x).



$\boldsymbol{a} > 0$

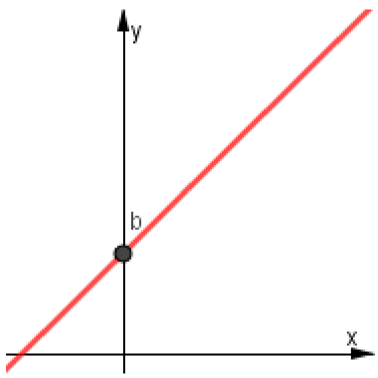


$\boldsymbol{a} < 0$



$\boldsymbol{a = 0}$

- El valor de b es la **ordenada al origen**, es decir, el valor del eje y en que la recta lo intersecta.



Observemos que ese valor b se obtiene al reemplazar en la función la x por 0. Para el ejemplo anterior resulta:

$$y = -\frac{1}{2}.0 - 2 = -2$$

Entonces diremos que esa recta pasa por el punto de coordenadas $(0, -2)$.

Además:

- Si la pendiente de la recta no es cero, su gráfico intersecta al eje x en un punto. El valor de la abscisa de dicho punto puede calcularse igualando la expresión de la función a 0 y resolviendo la ecuación resultante. Para el ejemplo anterior se plantea:

$$-\frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x = 2$$

$$x = -4$$

Entonces diremos que la recta pasa por el punto de coordenadas $P(-4, 0)$.

¿Cuántos puntos se necesitan para graficar una recta? ¿Podemos realizar su gráfico conociendo sus intersecciones con los ejes de coordenadas?

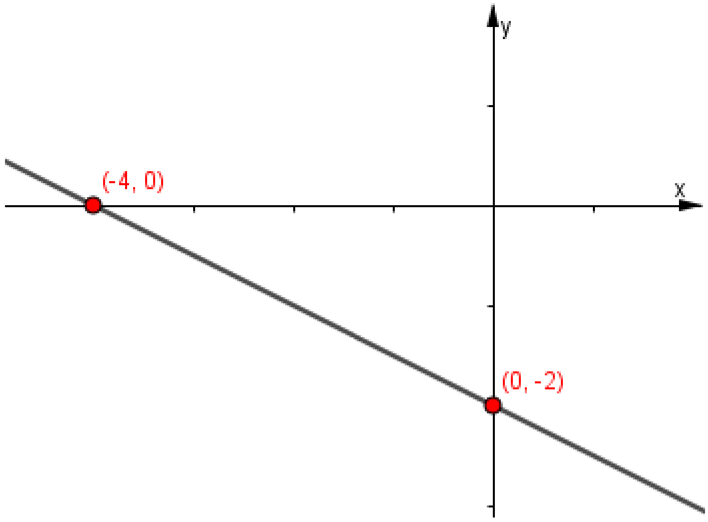
Para la función lineal del ejemplo anterior:

a) Realizar su gráfica.

b) Indicar, observando la gráfica, otro punto perteneciente a la recta? ¿Cómo podríamos validar esta observación analíticamente?

c) ¿Cuál es el conjunto imagen de f?

a)



b) Otro punto de la recta es $(-2, -1)$, esto podemos verificarlo reemplazando en la fórmula de la función:

$$f(-2) = -\frac{1}{2}(-2) - 2 = -1$$

c) El conjunto imagen de la función es $im(f) = \mathbb{R}$

3.2.2 Ecuación de una recta a partir de datos

En algunos casos no se tiene la ecuación de la recta pero sí ciertos datos que ayudarán a deducirla.

Entonces si tenemos:

- La pendiente a y un punto $P(x_1, y_1)$ perteneciente a la recta:

$$y = ax + b$$

$$y_1 = ax_1 + b$$

Despejando b obtenemos:

$$b = y_1 - ax_1$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$y = ax + (y_1 - ax_1)$$

$$y = ax - ax_1 + y_1$$

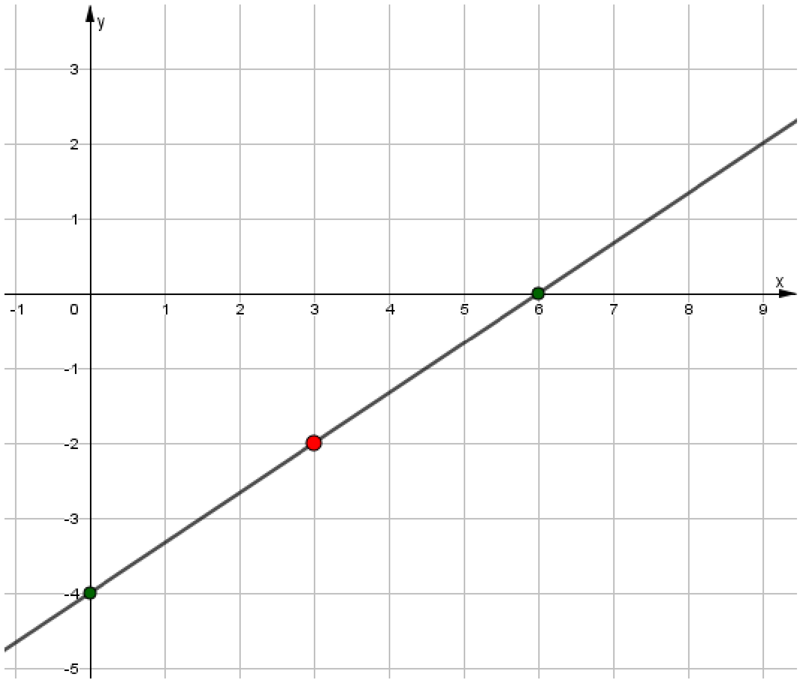
Sacando factor común a resulta:

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

Si por ejemplo quisiéramos hallar la ecuación de la recta de pendiente $\frac{2}{3}$ y que pasa por el punto de coordenadas (3, -2), obtenemos:

$$y = \frac{2}{3}(x - 3) - 2$$

El gráfico de la recta hallada en el ejemplo anterior es el siguiente:



¿Qué "recorrido" debemos realizar para llegar desde el punto de intersección de la recta con el eje y al punto $(3, -2)$? ¿Y desde el punto $(3, -2)$ al punto de intersección de la recta con el eje x? ¿Qué sucede si repetimos este recorrido? ¿Qué relación tiene lo observado con la pendiente de la recta?

Diremos que: $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Donde Δy es la diferencia de las ordenadas de dos puntos de la recta y Δx es la diferencia de las abscisas correspondientes de los mismos puntos. Esto es, conocidos dos puntos pertenecientes a la recta, $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ su pendiente puede calcularse como:

$$\boldsymbol{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad si \quad x_2 - x_1 \neq 0}$$

- Dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ pertenecientes a la recta:

  Unificando las dos fórmulas anteriores obtenemos:

$$\boldsymbol{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1}$$

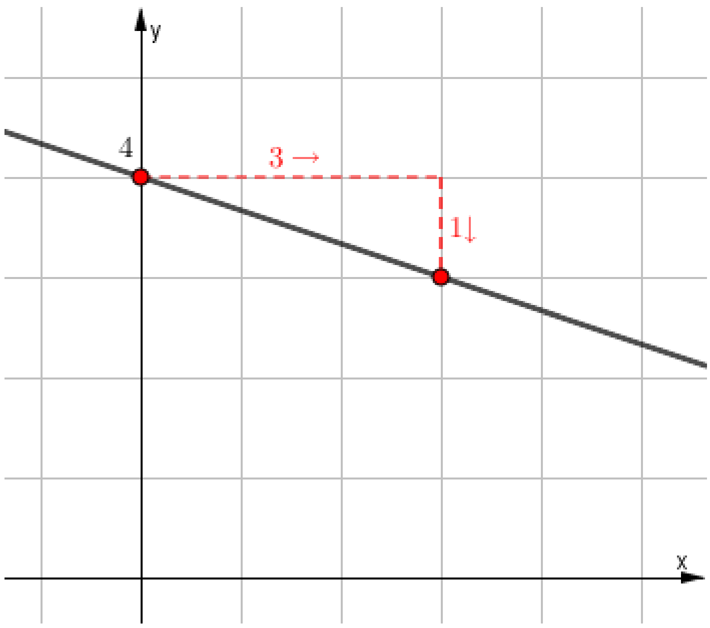
Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(-3, -4)$.

$$y = \frac{-4 - 2}{-3 - (-1)}\big(x - (-1)\big) + 2$$

$$y = 3(x + 1) + 2$$

Ejemplo: Utilizando la información brindada por la pendiente y la ordenada al origen graficar $y = -\frac{1}{3}x + 4$, sin realizar cálculos.

Con la ordenada al origen podemos encontrar el punto de intersección de la recta con el eje de las ordenadas, que es $(0{,}4)$ y utilizando la información brindada por la pendiente podemos ubicar un segundo punto de la recta. Luego la gráfica resulta:



3.2.3 Paralelismo y perpendicularidad

Diremos que dos rectas $y = a_1x + b_1$; $y = a_2x + b_2$

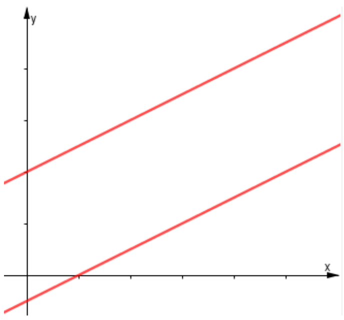
- son **paralelas** si tienen la misma pendiente $a_1 = a_2$ o si ambas son paralelas al eje de las ordenadas.

- son **perpendiculares** cuando una de ellas es paralela al eje de las abscisas y la otra al eje de las ordenadas o bien cuando siendo $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$, sus pendientes son inversas y opuestas, es decir, cuando el producto de ellas da como resultado -1:

$$a_1 = -\frac{1}{a_2} \iff a_1 . a_2 = -1$$

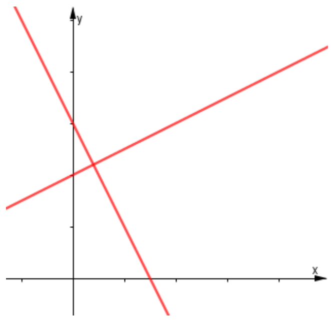
Ejemplos:

Rectas paralelas



$y = \frac{1}{2}x + 2$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Rectas perpendiculares



$y = \frac{1}{2}x + 2$ $\qquad$ $y = -2x + 3$

Veamos a modo de ejemplo cómo hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1,2)$ y es perpendicular a la recta L: $4x - 2y + 1 = 0$.

En primer lugar es necesario detectar la pendiente de la recta L, cuya ecuación se encuentra escrita en **forma implícita**. Para hallar la **forma explícita** despejamos la variable dependiente y:

$$4x - 2y + 1 = 0$$

$$-2y = -4x - 1$$

$$y = (-4x - 1):(-2)$$

$$y = 2x + \frac{1}{2}$$

Entonces la pendiente de la recta dada es 2 y la pendiente de la recta perpendicular buscada será $-\frac{1}{2}$. Finalmente, la ecuación resulta:

$$y = -\frac{1}{2}\big(x - (-1)\big) + 2$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+1) + 2$$

3.2.4 Planteo y resolución de problemas

Las funciones lineales son ampliamente utilizadas para representar situaciones problemáticas diversas.

Problema 1. El costo variable de procesar un kilogramo de granos de café es de \$50 y los costos fijos por día son de \$3000.

a) Dar la ecuación de costo total de procesar x kilogramos de café, sabiendo que se trata de una función lineal.

b) Utilizando una escala adecuada dibujar su gráfica.

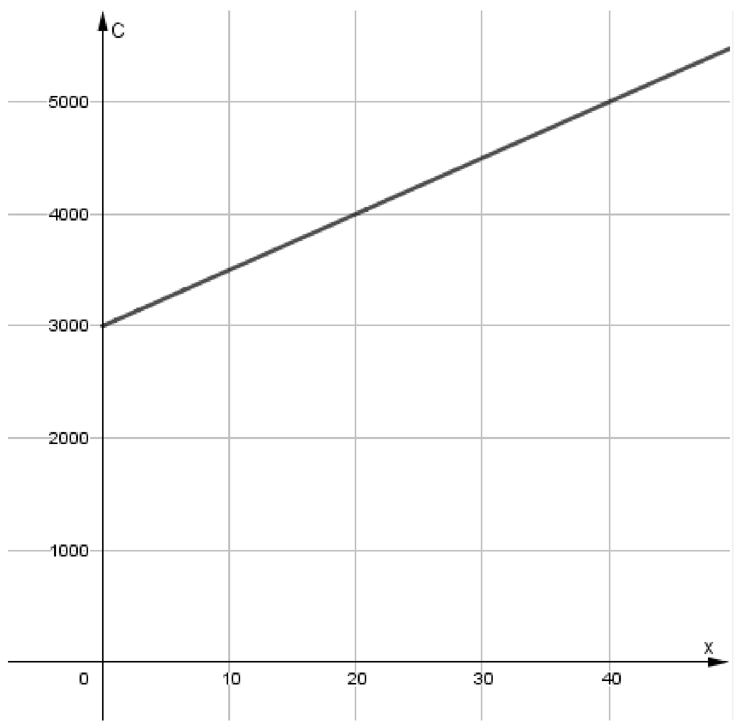
c) Determine el costo de procesar 1000 kilogramos de granos de café en un día.

Resolución:

a) Los costos fijos no dependen de la cantidad de café procesado, este valor es el término independiente en la ecuación de la función. Por otro lado, cada kilogramo de café se procesa a un costo de \$50, por lo que x kg se procesará a un costo de $50x$. Sumando costo fijo y variable obtenemos la ecuación que da el costo total diario de procesar x kg de café:

$$C(x) = 50x + 3000$$

b)



Observemos que para su gráfica tomamos valores de x acordes al planteo del problema, esto es $x \geq 0$. Por lo tanto $Dom(C) = [0, +\infty)$.

c) El costo de procesar 1000 Kg de granos de café será de $53000; en efecto:

$$C(1000) = 50.1000 + 3000 = 53000$$

Problema 2. El costo de fabricar 10 notebooks al día es de U$S350, mientras que cuesta U$S600 producir 20 notebooks del mismo tipo al día. Suponiendo un modelo de costo lineal, determinar la función de costo total C de producir x noteboos al día y trazar su gráfica.

En este tipo de problemas es de mucha utilidad poder establecer qué representa cada variable que involucraremos en la función. Aquí:

x: Cantidad de notebook a producir.

C: Costo de producción en dólares.

Luego al producir 10 notebooks el costo es de U$S350, esto implica que $C(10) = 350$ entonces el punto $(10{,}350)$ es un punto en la representación gráfica de dicha función.

De la misma forma $C(20) = 600$, entonces el punto $(20{,}600)$ es otro punto en la representación gráfica de la función.

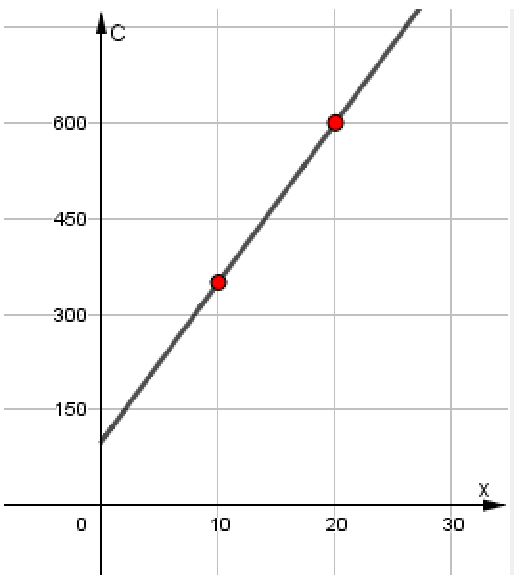
Finalmente podemos construir la fórmula a partir de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, pues se aclara que se trata de un modelo de costo lineal:

$$C(x) = \frac{600 - 350}{20 - 10}(x - 10) + 350$$

$$C(x) = 25(x - 10) + 350$$

O bien:

$$C(x) = 25x + 100$$



3.2.5 Guía de Actividades

1. Para la función lineal $f(x) = 3 - 2x$ completar donde corresponda:

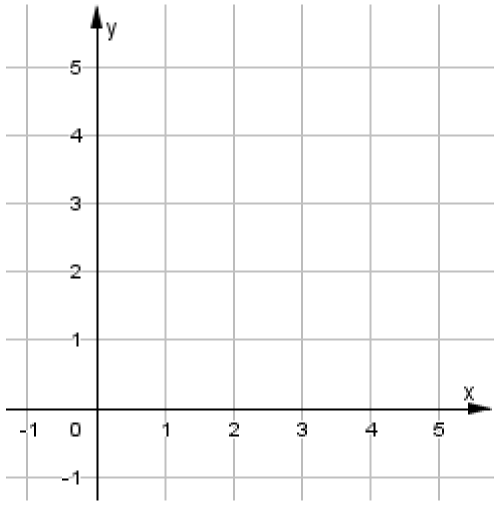
a) Su pendiente es $a =$ _______

b) Su ordenada al origen es $y =$ _______. El punto de intersección con el eje y es (0 ,).

c) Intersecta al eje de las abscisas en $x =$ ________. El punto de intersección con el eje x es (, 0).

d) Con la información de los incisos anteriores puede trazarse su gráfica, resultando ⟹

e) Como $f\left(\frac{2}{3}\right) =$ _______________ puede concluirse que la función pasa por el punto de coordenadas $\left(\frac{2}{3}, \_\_\_\_\_\right)$.



2. Para las siguientes funciones lineales determinar la pendiente, la ordenada al origen y usarlas para trazar la gráfica, sin realizar otros cálculos.

$\boldsymbol{a})\ y = 3x - 1$ $\boldsymbol{b})\ y = -2x$ $\boldsymbol{c})\ y = -3$

3. Obtener la forma explícita e indicar la pendiente y la ordenada al origen para cada una de las siguientes rectas.

$\boldsymbol{a})\ 3y + 4x + 1 = 0$ $\boldsymbol{b})\ 3y + 6x - 9 = 0$

4. En cada caso, escribir la ecuación de la recta que cumple lo siguiente.

a) Es paralela a la recta $y = \frac{1}{2}x - 4$ y pasa por el punto $A(2, 5)$.

b) Es perpendicular a $2x - 3y + 1 = 0$ y pasa por el punto $B(1, 1)$.

c) Es paralela a la recta $y = 4$ y pasa por el punto $C(1, -5)$.

d) Es perpendicular a $y = -1$ y pasa por el punto $D(3,2)$.

e) Pasa por $P(3,1)$ y es paralela a la recta $3x + y - 1 = 0$.

f) Es perpendicular a la recta que pasa por $R(1,1)$ y $S(2,3)$; y pasa por el origen de coordenadas.

5. Dada la recta de ecuación $-\frac{21}{4}x - 5y + \frac{11}{3} = 0$ indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en todos los casos:

a) Su ordenada al origen es $y = -\frac{11}{3}$

b) Es paralela a la recta que pasa por los puntos $A = (-15,11)$ y $B = (5,-10)$

c) Una recta perpendicular tiene pendiente $a = -\frac{20}{21}$

6. Una compañía de teléfonos celulares tiene inicialmente 7 mil usuarios, y el número de éstos crece alrededor de 4 mil por año. ¿Cuál es la expresión de la función lineal que describe esta situación? ¿En qué año la empresa tendrá más de 15 mil usuarios?

7. Por el alquiler de un coche cobran $ 10000 diarios más $ 200 por kilómetro. Encontrar la ecuación de la recta que relaciona el costo diario con el número de kilómetros y representarla gráficamente. Si en un día se ha hecho un total de 300 km ¿Qué importe se debe abonar?

8. Un gasista tiene la siguiente tarifa: $\$20000$ por gasto de traslado y $\$15000$ por cada hora de trabajo.

a) Encontrar la función que exprese el costo del servicio en función del tiempo utilizado para el trabajo.

b) Representar gráficamente.

c) Calcular cuánto deberá cobrar por 2 horas y media de trabajo.

d) Determinar el tiempo invertido en un trabajo a domicilio si el importe cobrado fue de $\$72500$.

9. En el año 2010 una empresa compró máquinas nuevas para su fábrica. En ese momento el valor de las mismas era de $\$500000$, pero por el uso continuo y los avances de la tecnología este valor disminuye $\$18000$ por año.

a) Encontrar la expresión del valor de las máquinas en función de los años de uso.

b) Interpretar el valor de la pendiente en términos del problema.

c) ¿Cuál es el valor actual de las máquinas?

10. Un comerciante puede vender 20 rasuradoras eléctricas al día al precio de $U\$S25$ cada una, pero puede vender 30 si les fija un precio de $U\$S20$ a cada rasuradora eléctrica. Determinar la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal. (Precio en función de la cantidad demandada x).

3.3 FUNCIÓN CUADRÁTICA

3.3.1 Definición

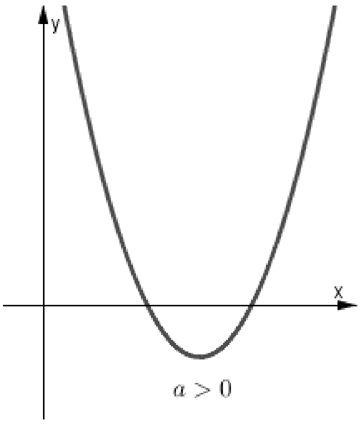
Una función cuadrática es una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya forma general es:

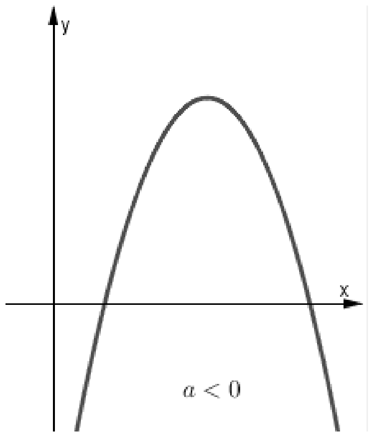
$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

donde $a, b \; y \; c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

¿Por qué decimos que $a \neq 0$?

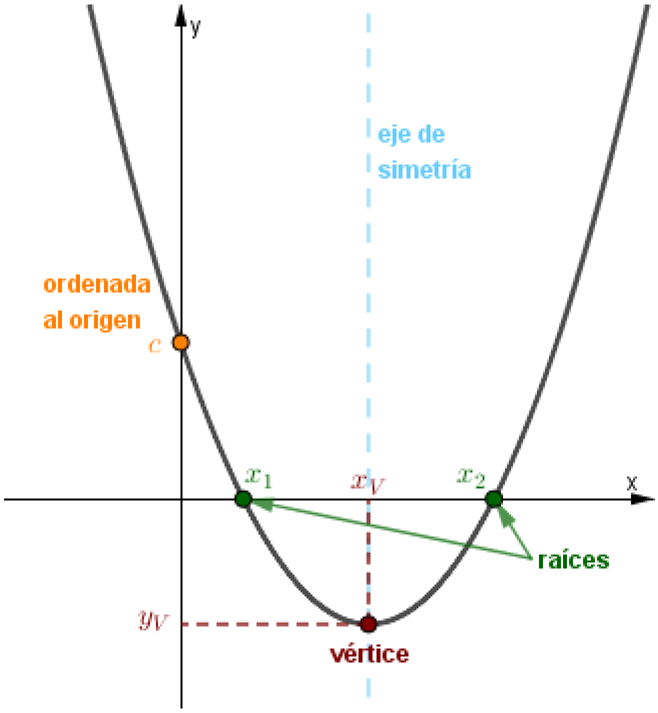
El gráfico de una función cuadrática es una **PARABÓLA**. El signo del coeficiente principal a indica la concavidad de la parábola: hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.





Los elementos de la parábola que serán necesarios calcular, para realizar su gráfica son los siguientes:

- el vértice, que es el punto máximo o mínimo de la función.
- las raíces, si existen, son los valores del eje de las abscisas en donde la parábola lo intersecta.
- el eje de simetría, es una recta paralela al eje de las ordenadas, respecto de la cual la parábola conserva simetría.
- la ordenada al origen, es el valor del eje de las ordenadas, en donde la parábola lo intersecta.



Las raíces se obtienen al plantear y resolver la ecuación:

$$f(x) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolver este tipo de ecuaciones, denominadas cuadráticas, se utiliza la fórmula resolvente:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión $\Delta = \boldsymbol{b^2} - \boldsymbol{4ac}$ la llamamos **discriminante** y es de particular interés, pues de su signo depende que la función tenga dos raíces reales ($\Delta > 0$), una raíz real doble ($\Delta = 0$) o ninguna raíz real ($\Delta < 0$).

Observación:

- ✓ Si $b = 0$ entonces las raices, si existen, pueden obtenerse resolviendo la ecuación $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$; $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$
- ✓ Si $c = 0$ entonces las raíces se obtienen de resolver la ecuación $ax^2 + bx = 0$ que factorizando resulta $x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0\,; x_2 = -\frac{b}{a}$.

Para el vértice será necesario calcular dos valores: su abscisa x_v y su ordenada y_v.

- Si se tienen las raíces, x_v equidista de ellas entonces puede calcularse como $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$, en caso contrario $x_v = -\frac{b}{2a}$.
- $y_v = f(x_v)$

El eje de simetría equidista de todo par de puntos de la parábola que tengan la misma ordenada. Su ecuación es: $\boldsymbol{x = x_v}$.

La ordenada al origen se obtiene al calcular $\boldsymbol{y = f(0)}$, entonces:

$$y = a.0^2 + b.0 + c$$

$$y = c$$

A modo de ejemplo grafiquemos $f(x) = x^2 + 6x - 7$ y determinar su dominio e imagen.

Como $a = 1, b = 6$ y $c = -7$:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2}$$

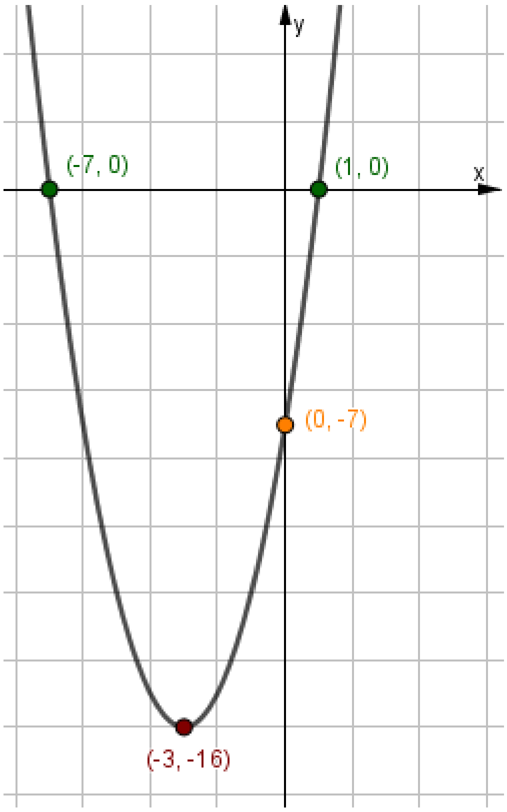
Entonces $x_1 = -7$ y $x_2 = 1$.

Por otro lado:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad f(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 7 = 9 - 18 - 7 = -16$$

Por lo que las coordenadas del vértice serán $(-3, -16)$ y la ecuación del eje de simetría es $x = -3$.

Por último la ordenada al origen es $y = -7$ y la gráfica resulta:



¿Cuál es su dominio?

¿Y su imagen?

El dominio de una función cuadrática f es $dom(f) = \mathbb{R}$ y su imagen depende del signo de a y del vértice:

- Si $a > 0 \rightarrow im(f) = [y_v\,;\ +\infty)$
- Si $a < 0 \rightarrow im(f) = (-\infty;\ y_v\,]$

3.3.2 Distintas formas de expresar la ecuación de la parábola

A partir de la ecuación polinómica o general de una parábola se puede escribir la ecuación ***canónica*** y la ***factorizada***, para esto se requiere contar previamente con los valores del vértice y las raíces, respectivamente.

$$y = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\textbf{Forma polinómica}} = \underbrace{a(x - x_v)^2 + y_v}_{\textbf{Forma canónica}} = \underbrace{a(x - x_1)(x - x_2)}_{\textbf{Forma factorizada}}$$

Resolviendo las operaciones planteadas en la forma canónica (cuadrado de un binomio y suma de términos semejantes) o en la factorizada (propiedad distributiva y suma de términos semejantes), se obtiene la ecuación polinómica.

Veamos el siguiente ejemplo: hallar la ecuación de la parábola con vértice $V = (1, -1)$ y tal que $f(2) = 1$.

Con el dato del vértice conviene plantear la forma canónica:

$$y = a(x - 1)^2 - 1$$

Nos falta obtener el valor del coeficiente principal "a", para esto y sabiendo que $f(2) = 1$ podemos reemplazar en la ecuación:

$$1 = a(2 - 1)^2 - 1$$

$$1 = a.1^2 - 1$$

$$1 = a - 1$$

$$a = 2$$

Finalmente escribimos la ecuación buscada:

$$y = 2(x - 1)^2 - 1$$

3.3.3 Planteo y resolución de problemas de funciones cuadráticas

Muchas situaciones problemáticas pueden modelarse y resolverse estudiando el comportamiento de funciones cuadráticas. Analicemos los siguientes problemas.

Problema 1. El costo, en miles de pesos, de producir un cierto artículo viene dado por la fórmula $C(u) = 36 - 18u + 3u^2$ donde u es el número de unidades de dicho artículo.

- **a)** ¿Cuál es el costo de producir 15 unidades de dicho artículo?
- **b)** ¿Cuántas unidades de este artículo habría que producir para que el costo sea el **mínimo** posible?
- **c)** ¿Cuál es el costo mínimo?

a) Para saber el costo de producir 15 unidades, simplemente evaluamos la función en $u = 15$:

$$C(15) = 36 - 18.15 + 3.15^2$$
$$C(15) = 441$$

El costo de producir 15 unidades es 441 mil pesos .

b) Para este inciso es importante observar que la función C, $a = 3$ por lo que la parábola es cóncava hacia arriba y posee un mínimo en el vértice. Como se pregunta sobre cuantas unidades habría que producir para que el costo sea mínimo, buscamos la abscisa del vértice:

$$u_V = \frac{-(-18)}{2.3} = \frac{18}{6} = 3$$

el costo mínimo se alcanza cuando se producen 3 unidades .

c) Ahora evaluamos la función $u = 3$ para calcular el correspondiente costo míinimo, que se obtiene para 3 unidades:

$$C(3) = 36 - 18.3 + 3.3^2 = 9$$

El costo mínimo es 9 mil pesos .

Problema 2. Los propietarios de una pequeña empresa familiar estiman que este mes tendrán una ganancia máxima de U$S1600 y que debido a gastos de materia prima y mantenimiento, no tendrán ganancia cuando fabriquen 30 y 110 artículos.

a) Encontrar la expresión que represente la ganancia de la empresa en función de los artículos fabricados, considerando que se trata de una función cuadrática.

b) Representar gráficamente la función hallada en a) para $30 \leq \mathrm{x} \leq 110$. Indicar su imagen.

c) Determinar la cantidad mínima de artículos que se deben fabricar este mes para que la ganancia sea de U$S1500.

Llamemos $G(x)$ a la función ganancia, donde x es la cantidad de artículos fabricados.

a) Se sabe que:

- La ganancia es 0 cuando se fabrican 30 artículos: $G(30) = 0$
- La ganancia también es 0 cuando se fabrican 110 artículos: $G(110) = 0$

Por lo que tenemos las raíces de la función Ganancia y conviene plantear la forma factorizada.

$$G(x) = a(x - 30)(x - 110)$$

Falta obtener el valor de a. Pero prestemos atención al otro dato aportado por el enunciado:

- La ganancia máxima es U$S 1600, entonces $G_V = 1600$. Para poder reemplazar en la ecuación anterior necesitamos el valor de x_V pero como sabemos que se encuentra equidistante de las raices:

$$x_v = \frac{30 + 110}{2} = 70$$

Luego las coordenadas del vértice son $(70,1600)$ y usamos este dato para reemplazar:

$$1600 = a(70 - 30)(70 - 110)$$

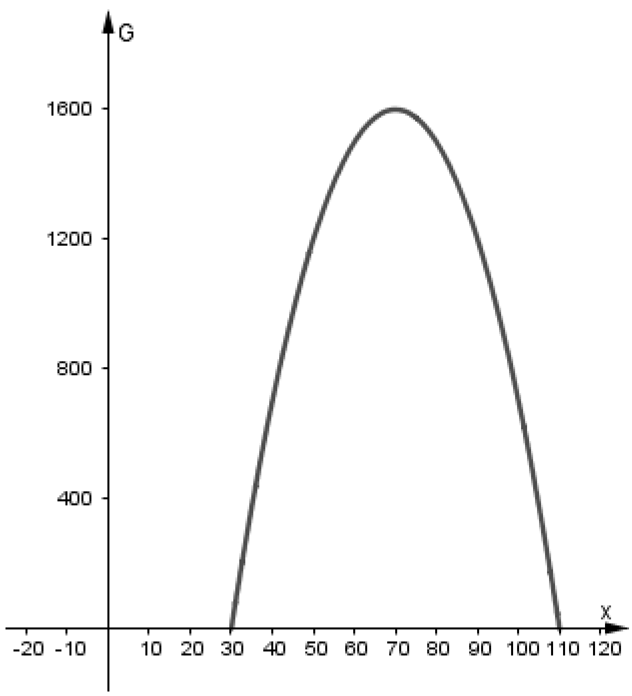
$$1600 = a.40.(-40)$$

$$1600 = a.(-1600)$$

$$a = -1$$

Entonces $G(x) = -(x - 30)(x - 110)$

b)



$$Im(G) = [0,1600]$$

c) Si queremos obtener para que cantidad de artículos para que la ganancia sea de U$S 1500 debemos reemplazar G por este valor:

$$G(x) = 1500 = -(x - 30)(x - 110)$$

$$(x - 30)(x - 110) = -1500$$

$$x^2 - 140x + 3300 = -1500 \Rightarrow x^2 - 140x + 4800 = 0$$

$$x = \frac{140 \pm \sqrt{(-140)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4800}}{2} = \frac{140 \pm \sqrt{19600 - 19200}}{2} = \frac{140 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{140 \pm 20}{2}$$

Finalmente, los valores obtenidos son: $x_1 = 60$ y $x_2 = 80$. La cantidad mínima de artículos que se de deben producir para obtener una ganancia de U$S 1500 es de 60.

3.3.4 Guía de Actividades

1. Dada la función cuadrática $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

Completar:

a) Sus coeficientes son: a=______, b=______ y c=______.

b) Sus raíces son: $x_1 =$ ______ y $x_2 =$ ______ .

c) Las coordenadas del vértice son:

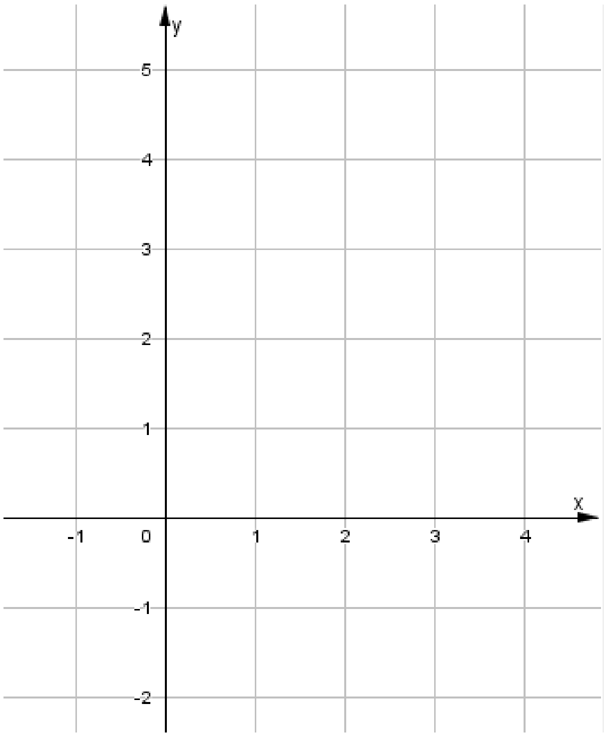
V=(_____ , _____).

d) La ecuación de su eje de simetría es $x =$ ______.

e) Su ordenada al origen es $y =$ ______.

f) La representación gráfica de la misma es: ⇨

g) $Dom(f) =$ __________ ; $Im(f) =$ ____________.



2. Hallar las ecuaciones de las funciones cuadráticas que verifican las siguientes condiciones y graficarlas:

a) Su vértice es $V = (-2, 1)$ y su ordenada al origen es $y = 4$.

b) Sus raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$ y $f(2) = 3$

3. Encontrar la forma canónica de una función cuadrática h con raíces 2 y 6 y tal que su imagen sea $[-1, +\infty)$. Graficarla.

4. Hallar los valores de los coeficientes b y c en la función $y = -x^2 + bx + c$ para que la misma tenga ordenada al origen en $y = 2$ y una de sus raíces en $x = 2$.

5. En una experiencia de laboratorio, una pieza de metal es sometida a un proceso en el cual su temperatura T, en grados centígrados, viene dada en función del tiempo x, en horas, por la expresión:

$$T(x) = 40x - 10x^2 \quad con \quad 0 \leq x \leq 4$$

a) Representarla gráficamente, encontrando previamente: vértice, intersecciones con los ejes de coordenadas y eje de simetría.

b) ¿Cuál es la temperatura máxima que alcanza la pieza? ¿En qué instante la alcanza?

c) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida una hora y media? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante? Si la respuesta es afirmativa, indicar dicho momento.

6. El rendimiento de nafta R (en km por litro) de un automóvil en ruta está relacionado con la velocidad v (en km/h) por la función: $R(v) = -\frac{1}{300}v^2 + \frac{3}{5}v$.

a) ¿Cuál debe ser la velocidad para que el rendimiento sea máximo?

b) ¿Cuál es el rendimiento máximo?

c) Si el rendimiento durante el viaje fue máximo, ¿se respetó el límite de velocidad de 110 km/h?

d) Graficar la función y responder**:** ¿para qué valores de v el rendimiento disminuye?

7. Una empresa de ingeniería desarrolla un pequeño dron diseñado para pruebas de vuelo. Durante una prueba de despegue vertical, los ingenieros registraron que el dron alcanza su altura máxima de **20 metros** a los **2 minutos** del despegue. Además, observan que trasncurrido **1 minuto** de vuelo, el dron se encuentra a una altura de **15 metros**.

a) Suponiendo que la altura del dron h, en metros, en función del tiempo t, en minutos, sigue una trayectoria parabólica, armar la expresión de la función cuadrática que modela el movimiento.

b) ¿Cuánto tiempo permanece el dron en el aire hasta tocar el suelo nuevamente?

c) Representar gráficamente la función. Indicar el vértice y las intersecciones con los ejes. Explicar qué representan en el contexto del problema.

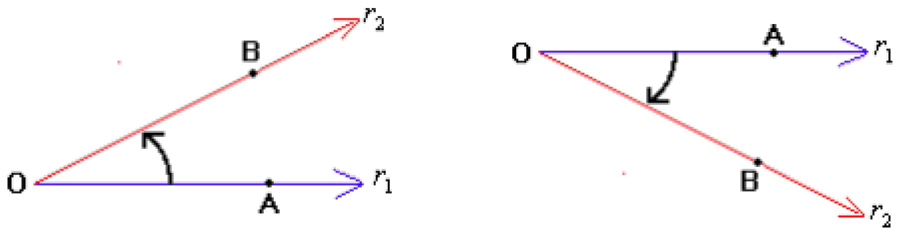
4. TRIGONOMETRÍA

"Los rudimentos de la trigonometría se remontan al trabajo de matemáticos griegos, egipcios, indios, árabes y chinos. La palabra *trigonometría* se deriva de dos vocablos griegos: trigon, que significa triángulo, y metro, que significa medida. Por tanto, el nombre trigonometría hace alusión a las diversas relaciones entre los ángulos de un triángulo y sus lados." (Zill, Dewar y Carril Villarreal, 2012, p. 355)

En este bloque trabajaremos la relación entre los triángulos, la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos a través del estudio de la trigonometría. Exploraremos cómo las razones trigonométricas permiten resolver problemas concretos de la vida real y de la ingeniería, como el cálculo de distancias, alturas o direcciones.

4.1 Sistemas de medición de ángulos

Geométricamente un ángulo $A\hat{O}B$ consta de dos semirrectas r_1 y r_2, con un origen común O.



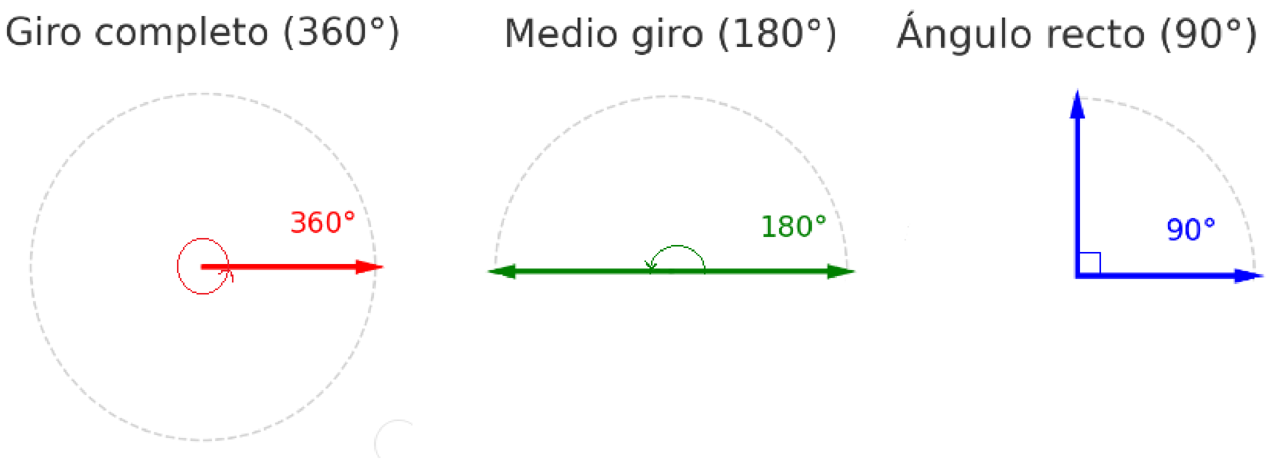
Interpretamos un ángulo como la rotación de r_1 hacia r_2. En este caso, a r_1 se lo llama **lado inicial** y a r_2 se lo llama **lado terminal** del ángulo. Usaremos, en general, para notar ángulos letras griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

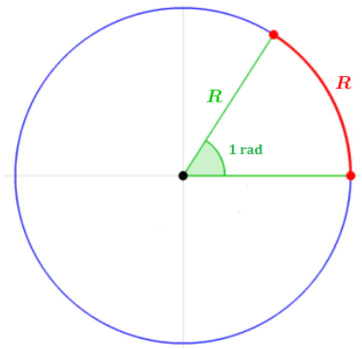
Para medir la amplitud de un ángulo hay varios sistemas de medición. Entre ellos, los más usados son el sistema sexagesimal y el sistema circular:

- En el **sistema sexagesimal**, la unidad de medida es el grado (°) , que corresponde a la 360-ava parte de un giro completo. A su vez, cada grado sexagesimal se divide en 60 partes iguales llamadas minutos (´), y cada minuto se divide en 60 partes iguales llamadas segundos (´´). Así, si un ángulo mide 34°14´23´´ leemos: 34 grados, 14 minutos, 23 segundos.

Por lo tanto:

- un giro completo tiene una amplitud de 360°,
- un ángulo llano o medio giro tiene una amplitud de 180°,
- un ángulo recto tiene una amplitud de 90°.





- En el **sistema circular,** también conocido como **radial**, se llama radián al ángulo que, teniendo su vértice en el centro de un círculo, determina en su circunferencia un arco de longitud igual al radio de la misma.

Por lo tanto:

- ➢ un giro completo tiene una amplitud de 2π radianes.
- ➢ la medida **aproximada** de un radián es de 57° 17´ 45´´.

Así, podremos convertir grados sexagesimales a radianes y viceversa, pues conocemos la siguiente equivalencia entre ambos sistemas:

$$\frac{\alpha\ (en\ radianes)}{2\pi} = \frac{\alpha\ (en\ grados)}{360°}$$

Veamos los siguientes ejemplos:

<u>Ejemplo 1</u>: Convertir 90° a radianes.

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{90°}{360°}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\pi$$

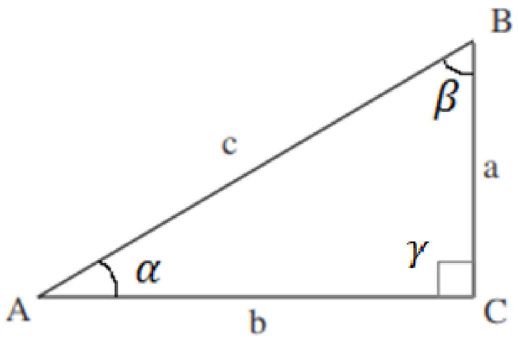
<u>Ejemplo 2</u>: Convertir $\frac{3}{2}\pi$ a grados sexagesimales.

$$\frac{\frac{3}{2}\pi}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}$$

$$\alpha = 270°$$

4.2 Razones trigonométricas

Consideremos un triángulo rectángulo ABC. El vértice C corresponde al ángulo recto y los vértices A y B corresponden a los ángulos agudos. Por consiguiente, la letra c corresponderá al lado que se opone al ángulo recto y que denominamos **hipotenusa**, y las letras a y b refieren a los lados que se oponen a los ángulos agudos y que denominamos **catetos**.



a, b: catetos

c: hipotenusa

Recordemos algunas propiedades conocidas sobre los ángulos y los lados de un triángulo:

- La **suma** de los **ángulos interiores** de cualquier triángulo es $\mathbf{180°}$.

  En particular si el triángulo es rectángulo, la suma de sus ángulos agudos es 90°. Para el triángulo ABC dado anteriormente, tenemos que:

$$\boxed{\alpha + \beta = 90°}$$

- **Teorema de Pitágoras**: en todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Definamos ahora relaciones entre ángulos y lados de un triángulo rectángulo, como el de la figura anterior.

Si tomamos como referencia al **ángulo agudo** $\boldsymbol{\alpha}$, el cateto a (que es el que se opone al vértice A) se llamará **cateto opuesto** y el cateto b (que es el que está contigüo al vértice A) se llamará **cateto adyacente**. Se definen, entonces, las **razones trigonométricas** seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo α, como indica la siguiente tabla:

$\boldsymbol{sen(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}}$	$\boldsymbol{cos(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}}$
$\boldsymbol{tg(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{b}}$	$\boldsymbol{cotg(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}}$
$\boldsymbol{cosec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}}$	$\boldsymbol{sec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{c}{b}}$

Observaciones:

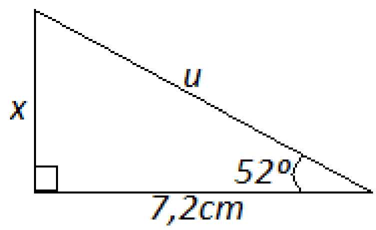
a) Notemos que la cotangente, la cosecante y la secante del ángulo α son los inversos multiplicativos de las razones tangente, seno y coseno de α, respectivamente, esto es:

$$cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} \qquad cosec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} \qquad \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

b) De manera análoga podemos definir todas las razones trigonométricas vistas para el ángulo agudo β.

Analicemos los siguientes ejemplos:

1) Hallar la longitud de los lados x y u para el triángulo rectángulo de la figura.



Debemos considerar qué datos conocemos y cuáles queremos hallar. En este caso tenemos un ángulo agudo y el cateto adyacente a dicho ángulo como datos y queremos calcular el valor del cateto opuesto, por lo que podemos utilizar la razón trigonométrica tangente:

$$tg(52°) = \frac{x}{7,2}$$

$$x \cong 9,22$$

Y para averiguar el valor de u, que es la hipotenusa, podemos usar la razon trigonométrica coseno:

$$\cos(52°) = \frac{7,2}{u}$$

$$u \cong 11,69$$

Los lados buscados entonces miden $x \cong 9,22$cm y $u \cong 11,69$ cm.

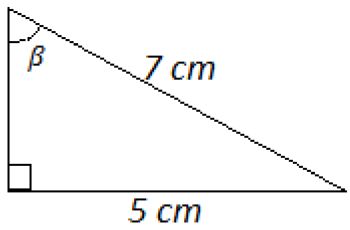
Atención:

Al utilizar la calculadora científica para estos cálculos es fundamental prestar atención al **modo angular** que se ha establecido. Utilizaremos dos modos:

- **DEG** (*"degrees" en ingles*): Se usa cuando trabajamos con ángulos medidos en grados sexagesimales.
- **RAD**: Se usa cuando los ángulos están expresados en radianes.

Importante: Si queremos calcular $sen(2°)$, la calculadora debe estar en **modo DEG.** Si queremos calcular $sen(2)$, debes estar en **modo RAD**. Un error común es olvidar cambiar el modo, lo cual puede llevar a resultados incorrectos. Por eso, siempre verificá el modo antes de hacer un cálculo trigonométrico.

2) Para el triángulo rectángulo de la figura averiguar el valor del ángulo β.



Observemos que tenemos los datos del cateto opuesto al ángulo β y de la hipotenusa, por lo que podemos plantear:

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{5}{7}$$

Pero ¿Cómo averiguamos el valor del ángulo?

Aunque lo trabajaremos mas adelante con mayor formalidad, vamos a definir el arco seno, arco coseno y arco tangente de un número real x de la siguiente forma:

- Si $-1 \leq x \leq 1$ el arco seno de x es un ángulo α cuyo seno vale x, esto es:

$$arcsen(x) = \alpha \Leftrightarrow sen(\alpha) = x$$

- Si $-1 \leq x \leq 1$ el arco coseno de x es un ángulo α cuyo seno vale x, esto es:

$$arccos(x) = \alpha \Leftrightarrow cos(\alpha) = x$$

- Si $x \in \mathbb{R}$ el arco tangente de x es un ángulo α cuya tangente vale x, esto es:

$$arctg(x) = \alpha \Leftrightarrow tg(\alpha) = x$$

Para el ejemplo anterior entonces, calculamos:

$$\beta = arcsen\left(\frac{5}{7}\right) \cong 45°35'5''$$

4.3 Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Un **triángulo oblicuángulo** es aquel en el que ninguno de sus ángulos interiores es recto. En estos casos, no podemos aplicar directamente las razones trigonométricas como lo hacemos en los triángulos rectángulos.

Para resolver triángulos oblicuángulos (es decir, para encontrar lados o ángulos desconocidos), utilizaremos dos herramientas fundamentales de la trigonometría:

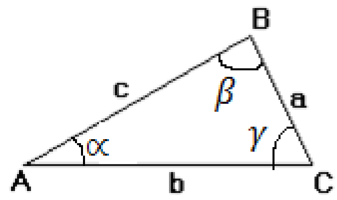
- El teorema del seno
- El teorema del coseno

Estos teoremas permiten resolver triángulos sin necesidad de que tengan un ángulo recto, ampliando así las aplicaciones de la trigonometría en distintos contextos.

4.3.1 Teorema del Seno

En un triángulo ABC cualquiera se verifica:

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}$$



4.3.2 Teorema del Coseno

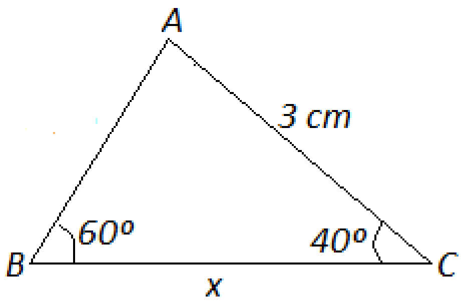
En el triangulo ABC cualquiera se verifica:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

Ejemplo: Para el triángulo ABC de la figura, hallar la medida del lado de longitud x.



Si queremos hallar el valor de x podríamos aplicar el teorema del seno, para esto necesitamos en primer lugar conocer la amplitud del ángulo con vértice A, llamemos a este ángulo α.

Como tenemos la amplitud de los ángulos con vértice en B y C, podemos plantear:

$$\alpha + 60° + 40° = 180°$$

$$\alpha = 80°$$

Luego aplicando el teorema del seno:

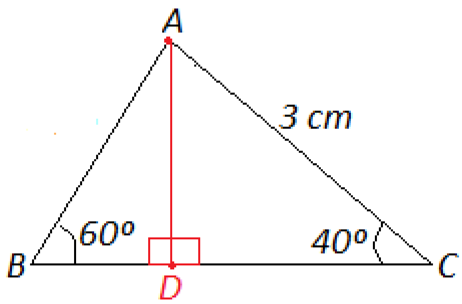
$$\frac{sen(80°)}{x} = \frac{sen(60°)}{3}$$

$$x = \frac{3sen(80°)}{sen(60°)}$$

$$x \cong 3{,}41$$

El valor buscando es $x \cong 3{,}41$ cm.

Observemos que sobre el triángulo ABC anterior, es posible trazar la altura respecto del lado BC y obtener dos triángulos rectángulos: ABD y ADC, que comparten el lado AD. Sobre estos triángulos podrían usarse razones trigonométricas e implementar una estrategia de resolución alternativa a la anterior ¿Cómo lo harías?



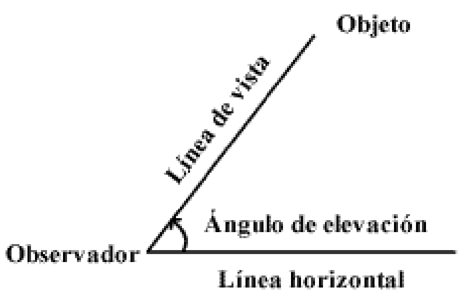
4.4 Planteo de problemas de trigonometría

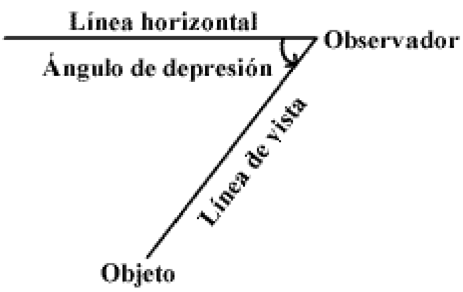
En muchos problemas de trigonometría es importante poder interpretar correctamente las situaciones que se describen. Para eso, se utilizan algunos términos específicos que nos ayudan a identificar los elementos clave del problema y a plantear el triángulo adecuado.

Una de las ideas centrales es la de **observador**: alguien que mira hacia un objeto o punto determinado. Si se traza una línea imaginaria que une al observador con el objeto observado, a esa línea se la llama **línea de visión**.

A partir de la posición del observador y del objeto, se pueden formar distintos ángulos con respecto a la horizontal:

- Si el observador mira hacia arriba, el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de elevación**.
- Si el observador mira hacia abajo, ese ángulo se llama **ángulo de depresión**.





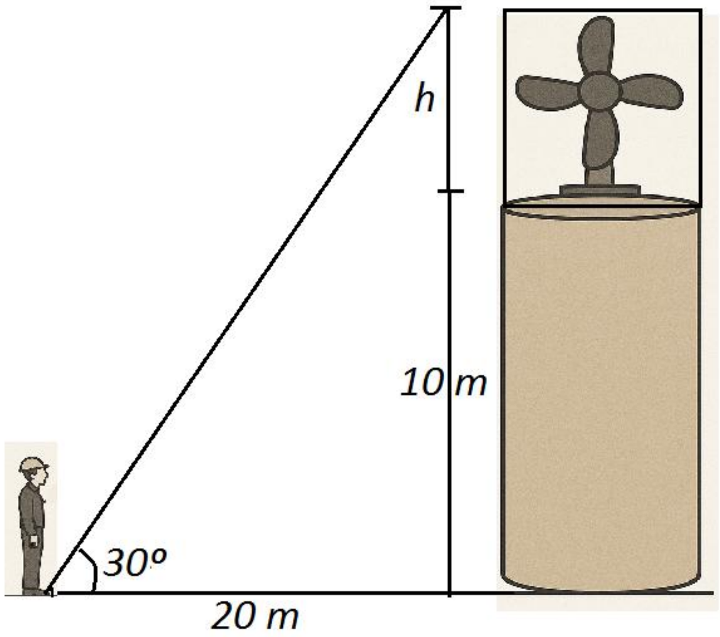
En general, estos ángulos se consideran desde el punto de vista del observador, que suele estar ubicado a nivel del suelo salvo que el problema indique lo contrario (por ejemplo, si se encuentra en una torre, un balcón o una colina).

Saber distinguir estos ángulos es fundamental para poder plantear correctamente los triángulos involucrados. Es importante comenzar cada problema con un dibujo claro en el que se vuelquen los datos que brinda el enunciado.

Analicemos el siguiente ejemplo:

En un parque industrial, se instala un **ventilador de extracción** en la parte superior de un tanque de almacenamiento. Desde un punto en el suelo, a 20 metros de distancia horizontal de la base del tanque, un técnico mide el ángulo de elevación a la parte superior del ventilador, obteniendo 30°. Sabiendo que el tanque tiene una altura de 10 metros, ¿cuál es la altura aproximada del ventilador respecto al tanque?

Hagamos un planteo:



Busquemos una forma de relacionar los datos numéricos con el valor de h que queremos hallar. Si observamos el planteo, se forma un triángulo rectángulo por lo qu podemos utilizar la razón trigonométrica tangente. Entonces:

$$tg(30°) = \frac{10 + h}{20}$$

$$20tg(30°) = 10 + h$$

$$20tg(30°) - 10 = h$$

$$h \cong 1{,}55$$

La altura del ventilador es de aproximadamente $1{,}55\ m$.

4.5 Guía de Actividades

1. Sabiendo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, indica y justifica si es posible construir un triángulo con los siguientes ángulos: $\alpha = \frac{1}{10}\pi$ rad, $\beta = \frac{19}{45}\pi$ rad, $\gamma = \frac{43}{90}\pi$ rad.

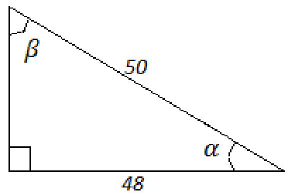
2. Para el siguiente triángulo, hallar las razones trigonométricas indicadas:

$$sen(\alpha) =$$

$$cotg(\alpha) =$$

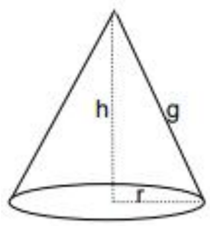
$$cosec(\beta) =$$

$$\cos(\beta) =$$



3. La siguiente figura es un cono de base circular, donde:

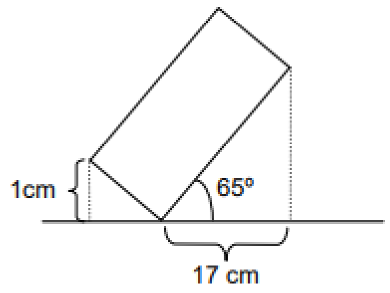
h = 7,5 cm: medida de la altura
g: medida de la generatriz
r = 3 cm: medida del radio de la base



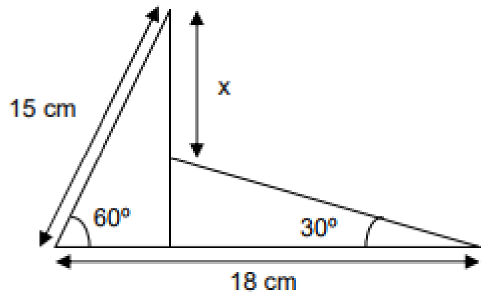
Determinar: a) La medida de la generatriz g.

b) El ángulo formado por la generatriz y el radio de la base.

4. Calcular la superficie del rectángulo de la figura:

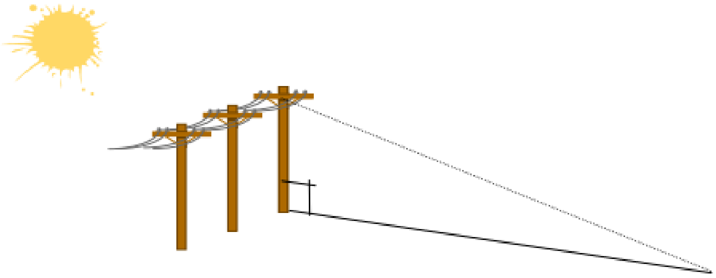


5. Calcular el valor de x en la siguiente figura:



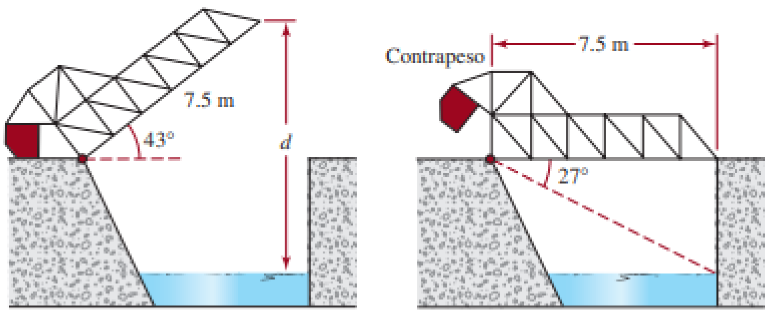
6. Una escalera de 6 metros está apoyada sobre un edificio. Si la base de la escalera está a 1,80 metros de la base del edificio, ¿Cuál es el ángulo de elevación de la escalera? ¿A qué altura llega la escalera en el edificio?

7. Calcular la altura de un poste de una línea de alta tensión que proyecta una sombra de 10 m, cuando los rayos del sol forman con el piso un ángulo de 35°.



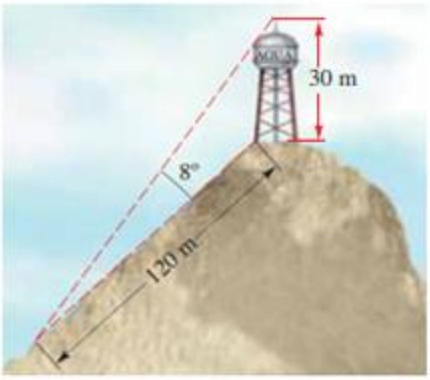
8. En una fábrica necesitan construir una cinta transportadora para llevar la mercadería desde el depósito, en el subsuelo, hasta el salón de ventas, que está en la planta baja. La distancia vertical entre los dos salones es de 2,60 m. Si el ángulo de inclinación de la cinta será de 24˚, ¿qué longitud aproximada deberá tener la misma?

9. Un puente levadizo mide $7{,}5\ m$ de orilla a orilla, y cuando se abre por completo forma un ángulo de 43° con la horizontal (veáse figura a) Cuando el puente se cierra, el ángulo de depresión de la orilla a un punto en la superficie del agua bajo el extremo opuesto es de 27° (véase figura b). Cuando el puente está totalmente abierto ¿cuál es la distancia d entre el punto más alto del puente y el agua?



a) Puente abierto   b) Puente cerrado

10. Una torre de 30 m para agua está situada en lo alto de un cerro. De una distancia de 120 m bajando por el cerro, se observa que el ángulo formado entre lo alto y la base de la torre es de 8°. Encontrar el ángulo de inclinación del cerro.



11. Una valla cuyo perímetro tiene forma triangular mide 20 metros en su lado mayor, 6 metros en otro y $60°$ en el ángulo que forman entre ambos. Calcular cuánto mide el perímetro de la valla.

12. ¿Cuál es la altura de una torre si el ángulo de elevación disminuye de $46°$ a $33°$ cuando un observador que está situado a una cierta distancia del pie de la torre, se aleja 100 m en la misma dirección?

13. Dos carreteras rectas divergen formando un ángulo de $65°$. Dos automóviles salen de la intersección a las 2:00 PM; uno viaja a $70\ km/h$ y el otro a $90\ km/h$. ¿Qué distancia los separa a las 2:30 PM?

14. Un ingeniero observa una maqueta de tres torres A, B y C que deberá construir. Las torres A y B se encuentran separadas por un lago. Trazando líneas rectas desde A hasta C y desde B hasta C, observa que las distancias son 50 cm y 70 cm, respectivamente. Además, el ángulo que forman dichas líneas rectas es de 65°. Sabiendo que la escala para realizar la maqueta fue 1cm $\equiv$ 2 km, ¿cuál es la longitud real del lago que separa las torres A y B?

15. Dos barcos salen de un mismo puerto simultáneamente. Uno avanza a una velocidad de 50 km/h en dirección N $50°$ E y el otro a una velocidad de 45 km/h en dirección S $70°$ E ¿Qué distancia los separa después de una hora?

Bibliografía

Altman, SV, Comparatore, CR y Kurzrok, LE (2015). *Matemática: Funciones 1* (1ª ed.). Longseller.

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur. (2024). *Acompañamiento a las trayectorias iniciales. Matemática: Notas teóricas y guía de actividades. Curso 2025*

Flores Espinoza, R., Valencia Arvizu, MA, Dávila Rascón, G., & García Alvarado, MG (2008). *Fundamentos del calculo*. Editorial Garabatos. Proyecto FOMIX, CONACYT, Gobierno del Estado

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo* (6.ª ed.). Cengage Aprendizaje Editores .(6.ª ed.). Cengage Learning Editores.

Suhit, GN (2018). *Seminario de ingreso: Matemática*. Universidad Tecnológica Nacional. (7.ª ed.). Universidad Tecnológica Nacional.

Zill, DG, Dewar, JM y Carril Villarreal, M. del P. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica* (3.ª ed.). McGraw-Hill/Interamericana Editores.