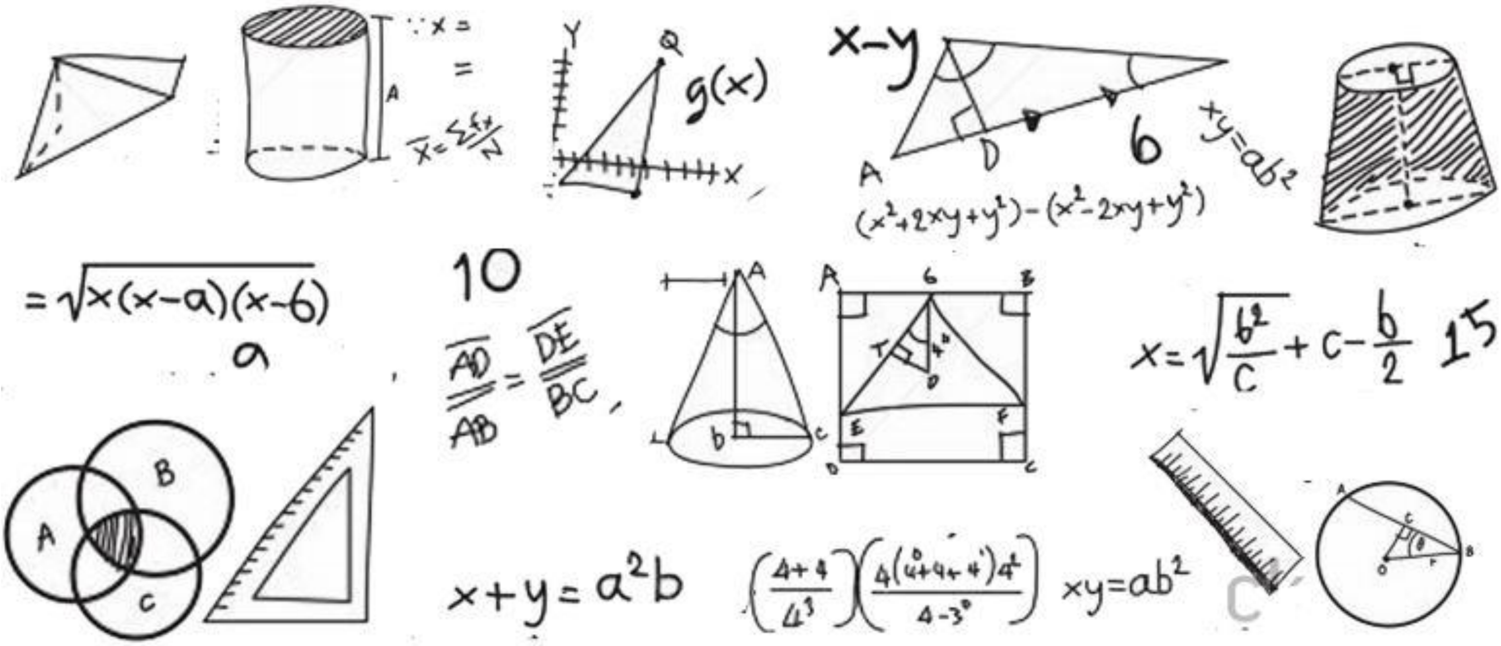
SEMINARIO DE INGRESO

MATEMÁTICA



UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
Facultad Regional Bahía Blanca

1.0.0 UN POCO DE HISTORIA

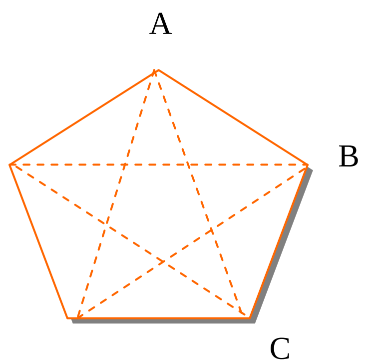
Hasta llegar al desarrollo actual de la idea de número el hombre necesitó muchos siglos de trabajo.

De las cuatro grandes civilizaciones del mundo occidental antiguo Babilonia, Egipto, Grecia y Roma, solamente dos mostraron una creatividad matemática notable: Babilonia y Grecia.

Los babilonios (2100 a.C.) poseían una organización administrativa muy compleja que se apoyó en el desarrollo de un sistema de numeración en base 60. Mediante él y gracias al valor posicional de los símbolos empleados, eran capaces de desarrollar con gran habilidad operaciones aritméticas complicadas.

En la aritmética egipcia, mucho más primitiva, el paso de una unidad a otra superior se indicaba no por la posición de las cifras sino mediante un nuevo símbolo.

Hacia el año 2000 a.C. los egipcios comienzan a manejar, con acierto, algunas ***fracciones*** sencillas, como: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, ...

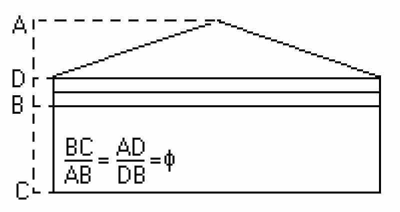


$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Los griegos, que elevaron las manipulaciones y recetas de los egipcios y babilonios a la categoría de ciencia, dieron el paso siguiente en el camino de los números.

En el siglo V a.C., los griegos pitagóricos descubrieron, con gran sorpresa que, además del natural y del fraccionario, existía otro tipo de número: el ***irracional***. Lo obtuvieron como relación entre la diagonal $\overline{AC}$ de un pentágono regular y su lado $\overline{AB}$.

Posteriormente consideraron que el rectángulo cuyos lados a y b están en la relación $\frac{a}{b} = \Phi$ era especialmente armonioso y lo llamaron rectángulo áureo (de oro), ya que la armonía era considerada una virtud especial.



Al número Φ lo llamaron número de oro. Esta proporción de medidas se ha usado con mucha frecuencia en el arte.

La consideración del número negativo surgió por la necesidad de dar solución a ecuaciones de la forma:

x +a = b con b<a

La construcción del concepto de número negativo llevó mucho más tiempo en el mundo occidental que en el oriental, pues los chinos lo habían resuelto veinte siglos antes.

x+8=3
x=3-8
x=-5

Aún a mediados del siglo XVII Descartes llamó falsas a las raíces negativas de una ecuación algebraica.

Es a partir del siglo XVII y con el desarrollo de la Geometría Analítica que se les da un sentido espacial: los negativos, en geometría, indican retroceso, los positivos un avance y de este modo se va incorporando el concepto de número negativo.

INICIANDO EL CAMINO

> El resultado de una medición <u>no</u> es siempre un número entero, por eso para expresar medidas se requiere un tipo de números que admitan *"partes de la unidad"*: los números <u>racionales</u> (el volumen del aire es de: 35,4 dm³; tiene una temperatura de 37,2 ºc,....)
>
> Los números además de expresar cantidades y medidas sirven también para operar con ellas, es decir, calcular ciertas cantidades a partir de otras conocidas

En el desarrollo del modulo encontrarás información que seguramente ya conocés. Así, por ejemplo, haz utilizado los números para:

- **Contar** (los días que faltan para un examen, los asistentes a un espectáculo, los cerámicos de un piso,....)

-

- **Ordenar** los elementos de un conjunto (la tierra es el tercer planeta según su distancia al sol, Juan es el quinto de la lista,....)

- **Medir** distintas magnitudes (longitud de un segmento, temperatura del agua,...)

SITUACIÓN POBLEMÁTICA

Un productor debe transportar latas de tomate, de forma cilíndrica de 4 cm de radio y 8,5 cm de altura y desea realizar el envío empacando las latas en cajas. En el mercado existen dos tipos de cajas de base rectangular

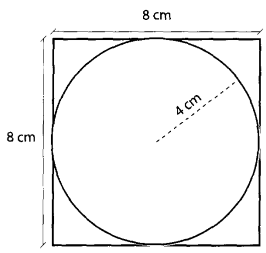
Cajas	Ancho (cm)	Largo (cm)	Alto (cm)
Tipo A	40	32	9
Tipo B	56	22	10

¿ Cuántas latas pueden ubicarse en cada tipo de caja?

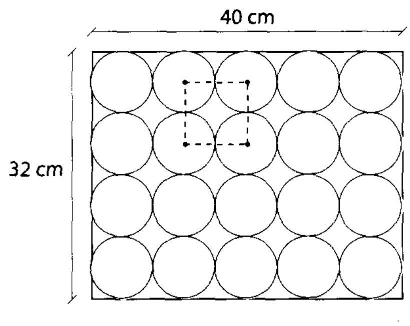
SOLUCIÓN

Analicemos las dos posibilidades

➢ **Si el productor utiliza cajas del tipo A**

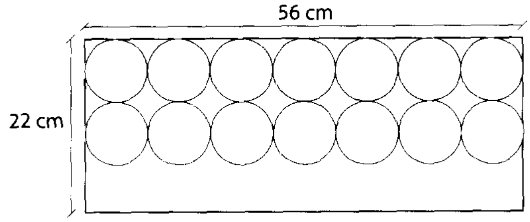


Como las latas tienen un radio de 4 cm pueden inscribirse, como muestra la figura, en un cuadrado de 8 cm de lado, luego podemos ubicar: 5 latas en cada fila y 4 latas en cada columna, es decir, 20 latas en cada caja.

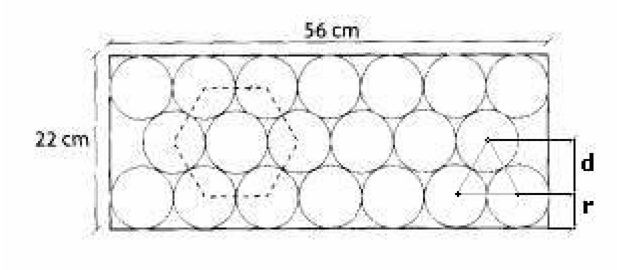


➢ **Si el productor utiliza cajas del tipo B**

Por las dimensiones de estas cajas, si se aplica el criterio anterior, se pueden ubicar 7 latas en dos filas, pero queda mucho espacio sin utilizar. La figura muestra otra posible disposición de las latas: dos filas de 7 y una intermedia de 6 latas.



Para asegurarnos que es posible, calculamos la distancia entre dos filas adyacentes. Como muestra la figura, la distancia *"d"* es la altura del triángulo equilátero que se determina uniendo los centros de las bases de tres latas contiguas, su valor es:



$$d = 8\ cm\ sen\ 60° = 8cm.\ \frac{1}{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ cm$$

Luego para disponer las latas de este modo el largo de la base de las cajas debe ser como mínimo igual a 2 r + 2 d , es decir:

$$2\ .\ 4\ cm + 2\ .\ 4\sqrt{3}\ cm = 8\ cm + 8\sqrt{3}\ cm \cong 21{,}856\ cm$$

Como las cajas tienen un largo de 22 cm es posible ubicar 20 latas en las cajas de tipo B.

¿?

¿ Puedes inferir cuál es el tipo de caja que ofrece el mayor rendimiento?

Para responder a las preguntas planteadas en el problema operamos con distintos tipos de números.

A continuación, vamos a recordar las definiciones y las propiedades de los distintos conjuntos numéricos.

1.2.0 NÚMEROS NATURALES

El producto de n números naturales desde 1 hasta n, se escribe n! y se llama <u>factorial de n</u>

Se escribe:

$n! = n(n-1).....2.1$

$n! = n(n-1)!$

$0! = 1$

$3! = 3.2.1=6$

Verificá con tu calculadora:

$8! = 40320$

$10! = 3628800$

Los números naturales surgieron, como comentamos anteriormente, de la necesidad de contar; este conjunto está formado por los elementos 1, 2, 3,..... y se designa con el símbolo ***N***.

Es decir, el conjunto ***N*** es aquél en que cada elemento se obtiene de sumar una unidad al elemento anterior. De esta forma el conjunto ***N*** resulta ordenado, o sea, dados dos números naturales a y b distintos, siempre uno es menor que otro.

Esto se expresa diciendo que <u>a</u> es menor que <u>b</u> ó <u>b</u> es mayor que <u>a</u>.

$$a < b \quad ó \quad b > a$$

El conjunto ***N*** tiene primer elemento (1) y no tiene último elemento, por lo que decimos que es infinito.

Indicamos $\quad N = \{1, 2, 3, 4,......\}$.

Los números naturales se pueden sumar y multiplicar y el resultado es otro número natural. No siempre ocurre lo mismo con la resta y la división. ¿Por qué?

1.2.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE *N*

Verificá cual de las siguientes operaciones da como resultado un número natural.

a) $8+\frac{(3-2)^2}{4}-\sqrt{25}=$

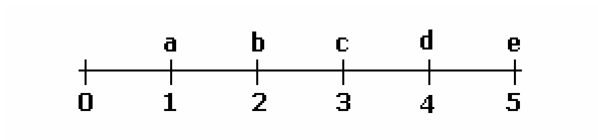
b) $\left(4-2^2\right)+3\sqrt{25}-\frac{4}{2}=$

c) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-1=$

d) $\sqrt[3]{8}.\sqrt{25}=$

Consideramos una recta cualquiera y sobre ella un punto origen *"o"*. Tomamos un segmento arbitrario como unidad y trasladándolo a partir del origen hacia la derecha, obtenemos sucesivas divisiones a, b, c,....Luego se hace corresponder a cada división un número natural.

O sea



A cada punto marcado en la recta se lo llama *"la gráfica"* del número natural correspondiente, mientras que el número asignado a cada punto se le llama *"la coordenada"* del mismo.

1.3.0 NÚMEROS ENTEROS

Eratóstenes (aprox. 276-196 a.C.) fue un famoso geógrafo, matemático y - astrónomo griego. Calculó con exactitud la circunferencia de la Tierra con un método ingenioso. Sin embargo su mayor fama la debe a su método de determinar números primos que hoy | se llama *criba de Eratóstenes.* Ese método consiste en hacer una lista de los enteros, comenzando por 2 (que es el primer primo), y después tachar todos los múltiplos de 2, que no son primos. El siguiente número de los que quedan en la lista es 3, que es el segundo primo, y de nuevo se tachan todos sus múltiplos. E1 siguiente número que queda es 5, el tercer número primo; se tachan todos sus múltiplos, y se continúa así. De esta forma, todos los números que no son primos quedan tachados, y los números restantes son los números primos.

Cuando en la resta el minuendo es menor o igual que el sustraendo, aparece la primera restricción en el conjunto ***N***.

Para definir esa operación, se amplía este conjunto al conjunto de los números enteros que se denotan con ***Z***.

Este conjunto ***Z*** es tal que:

- Contiene todos los elementos de ***N***.
- Al definir las operaciones en ***Z***, se conservan los resultados y propiedades de ***N***.
- La resta cuando el minuendo es menor o igual que el sustraendo siempre tiene solución.

Para ello, definimos el conjunto de los números negativos, donde cada elemento es el número opuesto de cada n e ***N***. Y se denomina con *"-n"*

O sea el conjunto de los números enteros es:

Z = {.........-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

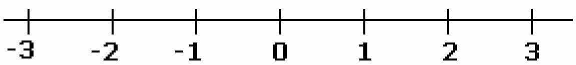
1.3.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE *Z*

¿?

a) Z ¿Tiene primer y último elemento?
b) Z ¿Es un conjunto ordenado?

Justificá tus respuestas

El conjunto ***Z*** se puede representar ampliando la recta de números naturales, en divisiones sucesivas a partir del origen, a la izquierda y por simetría.



1.4.0 NÚMEROS RACIONALES

El conjunto ***Q*** de los números racionales es un conjunto que contiene a los enteros ***Z*** y además en él tienen solución las divisiones donde el dividendo no es múltiplo del divisor.

Para ello definimos los *"números fraccionarios"* como el cociente entre dos enteros a y b cualesquiera, $(b \neq 0)$.

Los números $\frac{1}{5}$; $-\frac{3}{4}$; $\frac{12}{7}$ son números fraccionarios.

Luego tenemos que $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Z} \cup \boldsymbol{F}$, es decir, el conjunto de números racionales es unión del conjunto de números enteros y el conjunto de números fraccionarios.

Dos o más fracciones distintas pueden representar el mismo número. Esto es así, porque una fracción puede ser la forma más simplificada de otra.

Por ejemplo, las fracciones $\frac{4}{5}$ *y* $\frac{8}{10}$ representan el mismo número ya que $\frac{8}{10} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2}$

Si dos fracciones $\frac{a}{b}$ *y* $\frac{c}{d}$ son tales que a . d = b . c entonces son iguales o sea representan el mismo número.

1.4.1 EXPRESIONES DECIMALES

$\frac{2}{50} = 0{,}04; \quad \frac{2}{3} = 0{,}\widehat{6};....$

"Un número racional puede expresarse con una fracción o con una expresión decimal"

Al efectuar la división entre numerador y denominador de una fracción, para obtener la expresión decimal puede ocurrir que:

- En algún paso de la división el resto es cero.
- En algún momento los restos comiencen a repetirse.

En el primer caso se obtiene una <u>expresión decimal finita</u> y en el segundo se dice que la expresión decimal es <u>periódica,</u> las cifras que se repiten forman el período de la expresión decimal.

$\frac{1}{4} = 0{,}25$
expresión decimal finita.

$-\frac{1}{3} = -0{,}333.... = -0{,}\widehat{3}$
expresión decimal infinita.

$\frac{3549}{990} = 3{,}5848484... = 3{,}584$
expresión decimal infinita

RECÍPROCAMENTE:

"Toda expresión decimal finita ó periódica corresponde a un número racional"

Un número fraccionario también puede escribirse como una expresión decimal, que puede ser finita o infinita.

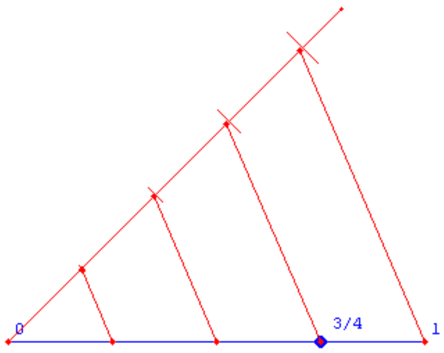
Las expresiones decimales infinitas tienen *"período"* y pueden tener *"parte no periódica"* como el tercer ejemplo. La parte anterior a la coma se llama *"parte entera"*. Las expresiones decimales pueden, recíprocamente, expresarse como una fracción.

1.4.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE Q

Los números racionales se pueden representar construyendo las fracciones sobre la recta.

➢ ***Si el numerador es menor que el denominador*** (es decir, su expresión decimal es un número comprendido entre 0 y 1)

Para representar el número $\frac{3}{4}$, dividimos al segmento unidad en cuatro partes iguales y tomamos 3, contando desde 0. Para ello seguimos los siguientes pasos utilizando regla, escuadra y compás:



- Dibujamos un segmento horizontal. Señalamos el extremo izquierdo con el número 0 y el derecho con el 1. Ese será nuestro segmento unidad.
- Trazamos desde el 0 una semirrecta cualquiera que no sea horizontal.
- Con el compás, marcamos en esa semirrecta, desde el 0, cuatro medidas iguales.
- Con una regla trazamos el segmento que une la última marca del compás en la semirrecta con el punto 1.
- Utilizando la regla y la escuadra, trazamos paralelas a ese segmento que pasen por las otras tres marcas del compás.
- Los puntos de corte de esos segmentos en el segmento unidad dividen al mismo en cuatro partes iguales.

➢ ***Si el numerador es mayor que el denominador*** (es decir, su expresión decimal es un número mayor que 1)

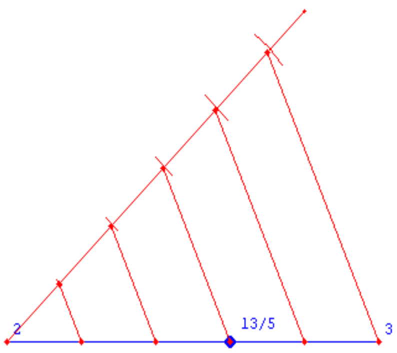
¿?

¿N es denso?
¿Z es denso?

La fracción se puede descomponer en suma de un número entero más una fracción menor que la unidad. Por ejemplo:

$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5},$$

donde 2 es el cociente entero de la división de 13 entre 5 y 3, el resto.
Así, el número 13/5 será un punto comprendido entre el 2 y el 3. Para representar el número 13/5 deberemos representar el número 3/5 en el segmento [2,3], es decir, dividir el segmento [2,3] en 5 partes y tomar 3 desde el punto 2.



En esta construcción, podemos ver que dados dos puntos de una recta (representativos de números racionales) entre ellos se pueden realizar aún infinitas divisiones.

Esto es lo mismo que decir que entre dos números racionales siempre existen "infinitos racionales".

Por gozar de esta propiedad, se dice que ***Q*** es *"denso"*. Se podría pensar entonces que toda la recta está cubierta, o sea, que cada punto de ella es la gráfica de algún número racional y viceversa. Sin embargo, veremos a continuación, que ello no es cierto.

1.5.0 NÚMEROS IRRACIONALES

Existen números tales como $\sqrt{2}$ = 1,4142 .... $\sqrt{3}$ = 1,7320 .... 1,10100100010000...
etc. que tienen infinitas cifras decimales y sin embargo no tienen período.

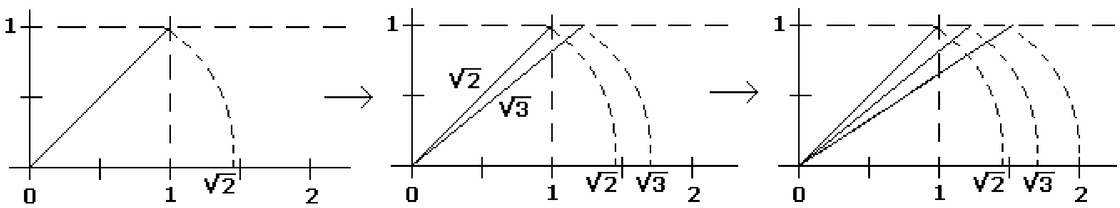
Estos números no pueden representarse como cociente entre dos enteros a y b. Estos son los números irracionales.

Además del número Φ (número de oro) ya definido, existen otros irracionales muy conocidos como:

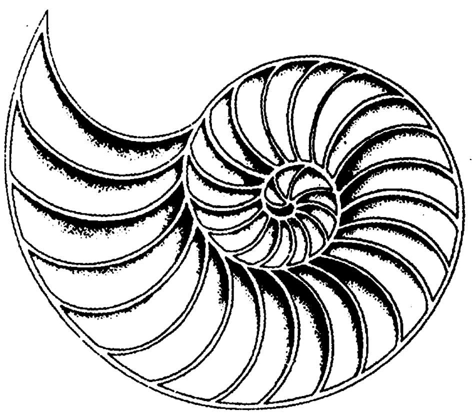
- El número π, que se usa para calcular, por ejemplo, la longitud de la circunferencia o el área de un círculo, tiene como expresión decimal: 3,1415926535..... Su irracionalidad se probó recién en el siglo XVIII.

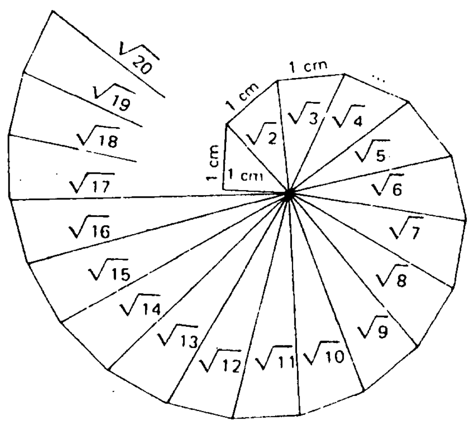
- El número ***e***, posiblemente el número más importante en matemática superior. Su valor decimal es: 2,718281..... Aparece en ciertos procesos de crecimiento vegetal o animal, en la desintegración radiactiva, en la fórmula de la *catenaria* (que es la curva que describe un hilo flexible que cuelga sujeto sólo por sus extremos),...

1.5.1 DIBUJANDO ALGUNOS IRRACIONALES EN LA RECTA



☺ La matemática en la naturaleza





1.6.0 NÚMEROS REALES

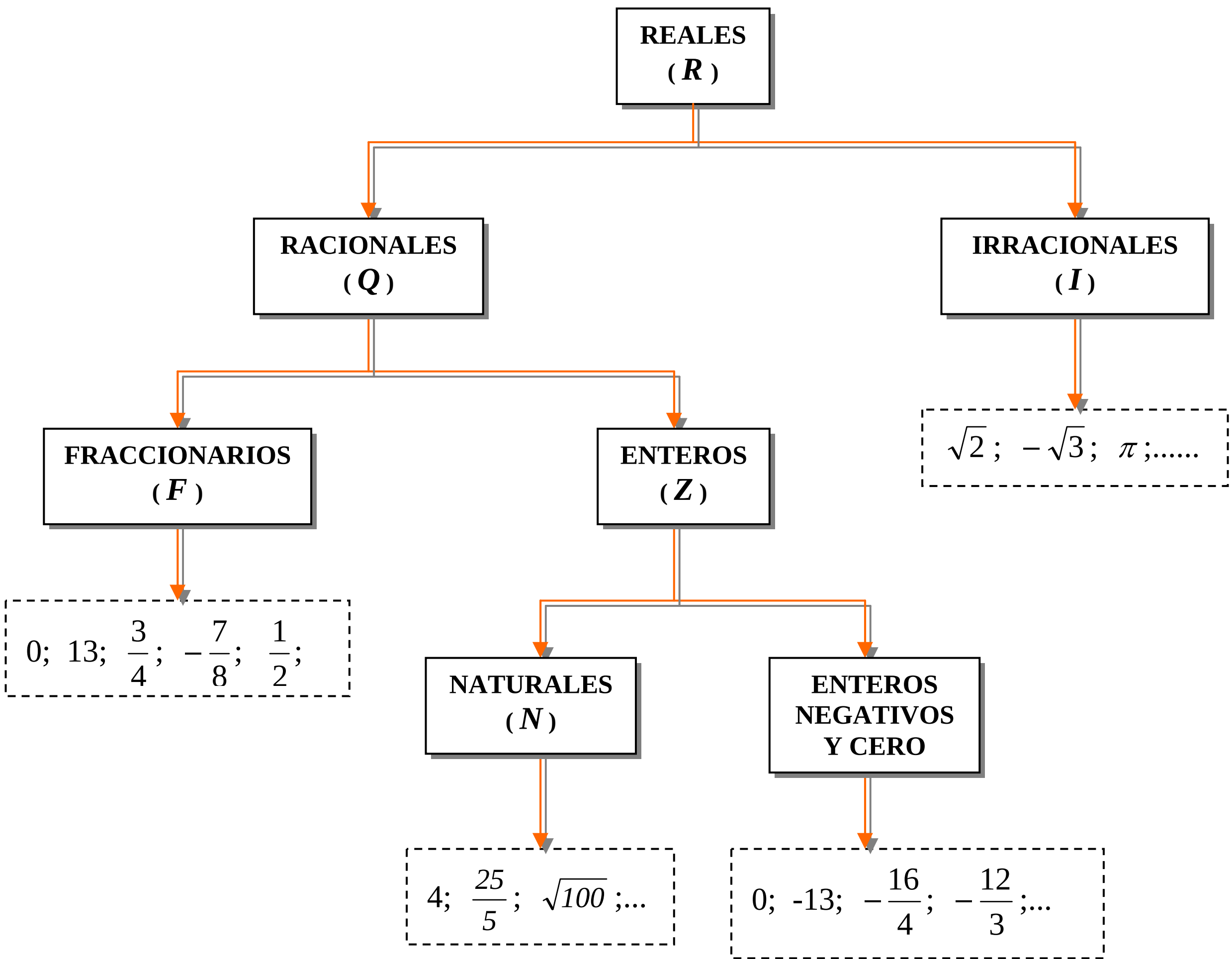
Los números racionales y los irracionales forman un nuevo conjunto llamado ***<u>números reales</u>*** que se representan por R.

Estos números completan la recta.

> ***Cada punto de la recta es gráfica de algún número real y cada número real es la coordenada de algún punto de la recta.***

Esta correspondencia es biunívoca, es decir, uno a uno.

El siguiente diagrama representa las sucesivas ampliaciones que realizamos del campo numérico.



1.6.1 OPERACIONES EN R – PROPIEDADES

En el conjunto de números reales podemos definir las operaciones de: adición, multiplicación, potenciación, radicación,...

Propiedad	Adición	Multiplicación
Ley de Cierre	$\forall a,b \in R \rightarrow a+b \in R$	$\forall a,b \in R \rightarrow a.b \in R$
Ley Uniforme	$\forall a,b,c \in R \;\; y \;\; a=b$ $\Rightarrow a+c=b+c$	$\forall a,b,c \in R \;\; y \;\; a=b$ $\Rightarrow a.c=b.c$
Ley Asociativa	$\forall a,b,c \in R$ $\Rightarrow (a+b)+c=a+(b+c)$	$\forall a,b,c \in R$ $\Rightarrow (a.b)c=a(b.c)$
Ley Conmutativa	$\forall a,b \in R$ $\Rightarrow a+b=b+a$	$\forall a,b \in R$ $\Rightarrow a.b=b.a$
Elemento neutro	$\exists\ 0 \in R \;\; /$ $a+0=0+a=a \quad \forall a \in R$	$\exists\ 1 \in R \;\; /$ $a.1=1.a=a \quad \forall a \in R$
Inverso	$\forall\ a \in R \;\; \exists\ b \in R \;\; /$ $a+b=b+a=0 \quad (b=-a)$	$\forall\ a \in R, a \neq 0 \;\; \exists\ b \in R \;\; /$ $a.b=b.a=1 \quad (b=a^{-1})$
Distributiva de la multiplicación respecto a la adición	$a(b+c)=a.b+a.c \quad \forall a,b,c \in R$	

POTENCIACIÓN

DEFINICIÓN

Sea $a \in R$, $n \in N$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ veces}$$

$$a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{ si } a \neq 0$$

PROPIEDADES

Sean $n,m \in Z$

- $(a.b)^n = a^n b^n$
- $a^n a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n.m}$

IDENTIDADES NOTABLES

Recordemos algunas identidades de uso frecuente en cálculos numéricos y algebraicos.

- $a(b+c)=ab+ac$ (Propiedad distributiva).
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (Cuadrado de un binomio).
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (Cuadrado de un binomio).
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (Cubo de un binomio).
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ (Diferencia de cuadrados).

✍

a) $7a^2b^3-14ab^2+21a^2b=$
b) $(4-x)^2+(x-4)^4=$
c) $16-x^4=$
d) $x^2-3=$
e) $(x+3)^2+(x-4)^3+(x-4)(x+3)=$

RADICACIÓN

DEFINICIÓN

$\sqrt[n]{a}=b$ *si y sólo si* $a=b^n$, *con* $n\in N$

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

- *Si a>0,* $\sqrt[n]{a}\ \exists$ *en* $R\ \forall\ n\in N$

☞ $\sqrt{7}$; $\sqrt[4]{21}$; $\sqrt[5]{0{,}789}$

- *Si a<0;.* $\sqrt[n]{a}\ \exists$ *en R* <u>solo si n es impar</u>

☞ $\sqrt[3]{-8}=-2$; $\sqrt{-8}$ *no tiene solución en R*

PROPIEDADES

Sean $a,b\in R$; $n,m,p\in N$

- $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$
- $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}$ si $b\neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

1.6.2 OPERACIONES CON RADICALES

- ***Adición y sustracción de radicales***

Solo es posible sumar o restar términos con radicales semejantes. Dos radicales son *semejantes* cuando tienen igual índice y el mismo radicando.

a) $2\sqrt{3}+\sqrt{3}-5\sqrt{3}=(2+1-5)\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{2}-2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+6\sqrt{5}=(4+3)\sqrt{2}+(-2+6)\sqrt{5}=\sqrt{2}+4\sqrt{5}$

c) $3\sqrt{2}-5\sqrt{32}+7\sqrt{8}=3\sqrt{2}-5\sqrt{2^5}+7\sqrt{2^3}$

$=3\sqrt{2}-5\sqrt{2^4}.\sqrt{2}+7\sqrt{2^2}.\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}-5.2^2\sqrt{2}+7.2\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}-20\sqrt{2}+14\sqrt{2}$

$=(3-20+14)\sqrt{2}=-3\sqrt{2}$

- ***Multiplicación y división de radicales***

El producto o cociente de varios radicales es el radical que se obtiene al multiplicar o dividir radicales reducidos a común índice.

a) $\sqrt[5]{x^3}.\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{x^3.x}=\sqrt[5]{x^4}$

b) $\sqrt[5]{3}.\sqrt[4]{2}=\sqrt[20]{3^4}.\sqrt[20]{2^5}=\sqrt[20]{3^4.2^5}=\sqrt[20]{81.32}=\sqrt[20]{2592}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[4]{2}}=\dfrac{\sqrt[12]{\left(2^2\right)^2}}{\sqrt[12]{2^3}}=\sqrt[12]{\dfrac{2^4}{2^3}}=\sqrt[12]{2}$

1.6.3 RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Dada una fracción en cuyo denominador aparece algún radical, se entiende por racionalizar, encontrar otra fracción igual a la dada y en cuyo denominador no figuren radicales.

☞

1) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

2) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{64}}=\dfrac{3}{\sqrt[5]{2^6}}=\dfrac{3}{2\sqrt[5]{2}}=\dfrac{3\sqrt[5]{2^4}}{2\cdot\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{2^4}}=\dfrac{3\sqrt[5]{16}}{2\sqrt[5]{2^5}}=\dfrac{3\sqrt[5]{16}}{4}$

3) $\dfrac{3}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{3\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{3\left(3+\sqrt{3}\right)}{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{3\left(3+\sqrt{3}\right)}{9-3}=\dfrac{\cancel{3}^{1}\left(3+\sqrt{3}\right)}{\cancel{6}_{2}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

4) $\dfrac{-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{-2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{-2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2}=-2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

Gerolamo Cardano (1501-1576) es sin lugar a dudas uno de los personajes más singulares en la historia de las matemáticas. En su época fue el médico con mayor renombre en Europa y a pesar de ello sufrió toda su vida numerosas enfermedades, incluyendo fracturas, hemorroides y el terror irracional a encontrarse con perros rabiosos. Sus adorados hijos lo hicieron sufrir- su consentido finalmente fue decapitado por haber asesinado a su esposa. Cardano fue un jugador compulsivo pero aprovechó este vicio para escribir el *Baok on Games of Chance*, el primer estudio de las probabilidades desde un punto de vista matemático correcto.
Su obra matemática de mayor importancia fue el *Ars magna*, en el cual detalló la solución de las ecuaciones polinomiales generales de tercer y cuarto grado. En el momento de su publicación los matemáticos se sentían incómodos incluso con los números negativos pero las fórmulas de Cardano abrieron camino a. la aceptación no sólo de los números negativos sino también de los números imaginarios, ya que se presentan de manera natural en la resolución de las ecuaciones polinomiales. Por ejemplo, una de sus fórmulas da la solución

$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$

para la **ecuación cúbica**

$x^3-15x-4=0$

Este valor para x de hecho resulta ser el *entero* 4, aunque para determinarlo Cardano tuvo que utilizar el número imaginario $\sqrt{-121}=11i$

1.7.0 NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número escrito en notación científica consta de una parte decimal, mayor o igual a 1 y menor que 10, seguido de una potencia de 10.

1) Indicá en notación científica.

a) 15320000000000=
b) 0,00000000001532=

2) Expresá el resultado en notación científica.

a) $(4{,}23.10^{-4}).(5{,}04.10^{9})$
b) $\dfrac{4{,}23.10^{-4}}{5{,}04.10^{9}}$

Cuando un número es muy grande o muy pequeño conviene expresarlo en notación científica, pues esta indica directamente el orden de magnitud.

Así por ejemplo:

1. La edad del universo se calcula en 15.000.000.000 = $15\ .10^{9}$ años.
2. El diámetro del electrón es aproximadamente

   0,0000000000010 mm = 10^{-12} mm.

Verificá las operaciones con tu calculadora

1.8.0 EXPRESIÓN APROXIMADA DE UN NÚMERO

En algunos casos, al operar con números que tienen expresiones decimales infinitas se utilizan aproximaciones de ésta.

Así, al utilizar el número $\pi = 3,14159265.....$ se pueden, por ejemplo, considerar aproximaciones al diezmilésimo, o sea, con cuatro cifras decimales, por truncamiento o por redondeo.

Aproximación por truncamiento: se eliminan todas las cifras decimales, a partir de la quinta, y se obtiene: $\pi = 3,1415$.

Aproximación por redondeo: se elimina a partir de la quinta cifra y como $9>5$ se aumenta en una unidad a la última cifra conservada: $5+1=6$; luego se obtiene $\pi = 3,1416$.

EN GENERAL:

La aproximación por truncamiento: a una cifra determinada consiste en eliminar las cifras que le siguen.

La aproximación por redondeo consiste en:

- ***Aumentar*** en una unidad la última cifra conservada, si la primera cifra a eliminar es igual o mayor que *5*
- ***Truncar*** directamente el número a la cantidad de cifras deseadas, si la primera cifra eliminada es menor que *5*.

✍

Aproximá usando dos dígitos:

a) 5,432	b) 3,053
c) 6,789	d) 12,674
e) 302,109	f) 6,911
g) 8,945	h) $\sqrt{2}$

FRBB

ACTIVIDADES

1) Ordená de menor a mayor, e indicá a qué conjunto numérico pertenece cada número:

a) $\frac{1}{4}$ **b)** 10^{-1} **c)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$ **d)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$

e) 2π **f)** e^{2} **g)** $\sqrt{25}$ **h)** $-\frac{5}{6}$

i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **j)** $-\frac{27}{18}$ **k)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ **l)** $\sqrt[5]{-32}$

2) Si es posible, ubicá cada elemento del siguiente conjunto en la categoría que corresponda:

$$\left\{0\ ;-10\ ;50\ ;-\pi\ ;0{,}532\ ;\sqrt{7}\ ;1{,}2\overset{\frown}{3}\ ;\frac{22}{7}\ ;\frac{2}{3}\right\}$$

a) Enteros no naturales.
b) Naturales no enteros.
c) Racionales no enteros.
d) Reales no racionales.
e) Irracionales no reales.

3) Determiná si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta:
a) $\sqrt{3}$ es un número irracional pero $2\sqrt{3}$ no lo es.
b) Todo número natural es racional.
c) $\sqrt{2}$ es un número irracional pero no real.
d) El único número racional mayor que 2,1 y menor que 2,3 es 2,2.
e) Todo número real es racional.
f) $\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}$ son números irracionales.

4) En busca de conclusiones.
a) Escribí un número racional mayor que 1.
b) Escribí un número racional mayor que 1, pero menor que el anterior.
c) Escribí más números racionales, cada vez menores, pero siempre mayores que la unidad.
d) Tratá de hallar el menor número racional que sea mayor que la unidad.
e) ¿Qué conclusión obtenés?

5) Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá en cada caso:
a) Entre dos números enteros hay siempre un entero.
b) Entre dos números racionales, siempre hay un racional.
c) Entre dos números racionales siempre hay un irracional.
d) Entre dos números racionales hay siempre infinitos racionales e irracionales.
e) Los números racionales completan la recta.
f) Los números reales completan la recta.

6) Resolvé (Sugerencia: aplicá propiedades cuando sea posible)

a) $\left(-4-2^0\right)^2 =$ **b)** $\left(-4\right)^{-2} =$

c) $\left(\frac{2}{7}\right)^0 =$ **d)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$

e) $\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2}.\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} =$ **f)** $\frac{a^2\cdot\left(b\cdot c\right)^2}{\left(a\cdot b\right)^3} =$

g) $3^x\cdot 3^x\cdot 3^x\cdot 3^x =$ **h)** $\left[\left(a^5.a^{-2}\right)^{-1}.\left(a^5:a^2\right)^{-1}\right]^3 =$

i) $\sqrt{\frac{9}{\sqrt[3]{64}}} =$ **j)** $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}{27}}$

k) $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{27}\cdot 3}}{\sqrt[4]{2^6}\cdot\sqrt{2}} =$ **l)** $\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[9]{x^6}\cdot\sqrt[15]{x^{10}} =$

m) $\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} =$ **n)** $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} =$

7) Resolvé las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}-5\sqrt{2} =$ **b)** $\sqrt{a}-2\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b} =$

c) $3\sqrt{18}-11\sqrt{2}+2\sqrt{50} =$ **d)** $\sqrt{9x}-\sqrt{25x}+\sqrt{49x} =$

e) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{16}{27}}-\frac{5}{3}\sqrt[3]{54}+5\sqrt[3]{\frac{2}{125}} =$ **f)** $\sqrt[4]{48}-\frac{3}{2}\cdot\sqrt[4]{32}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{162} =$

g) $\frac{1}{10}\cdot\sqrt{125}-4\cdot\sqrt{\frac{5}{16}}+2\cdot\sqrt{\frac{5}{36}} =$ **h)** $\sqrt{12a}-2\sqrt[4]{9a^2} =$

i) $\sqrt{x^5}+4x\sqrt{x^3}-\sqrt[4]{81x^{10}} =$ **j)** $\sqrt[4]{2a^2}.\sqrt[4]{ab}.\sqrt[4]{2ab} =$

k) $\sqrt{3}.(\sqrt{6}-\sqrt{24})+\sqrt{98} =$ **l)** $\sqrt{m}.\sqrt[3]{m^2}.\sqrt[4]{m^3} =$

m) $\sqrt[3]{ab^2}.\sqrt[5]{a^2b^3} =$ **n)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} =$

8) Resolvé $\frac{\sqrt[6]{2\cdot\sqrt[3]{2^6}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2^7}}}$ de dos maneras diferentes: aplicando propiedades de la radicación y aplicando propiedades de exponente fraccionario.

9) Racionalizá:

a) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{2}} =$ **b)** $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x}} =$ **c)** $\dfrac{4}{\sqrt[9]{256y^8}} =$

d) $\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} =$ **e)** $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}} =$ **f)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}} =$

g) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} =$ **h)** $\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} =$ **i)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$

j) $\dfrac{5\sqrt{14}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} =$ **k)** $\dfrac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} =$

10) En cada caso, indicá la opción correcta justificando tu respuesta:

a) La cuarta parte del duplo de $\dfrac{1}{3}$ es:

$\dfrac{1}{9}$ $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{6}$ $\dfrac{2}{3}$

b) El triple de la diferencia entre $\dfrac{4}{3}$ y $\dfrac{1}{6}$ es:

3,5 $\dfrac{7}{3}$ $\dfrac{1}{3}$ $\dfrac{21}{5}$

c) El resultado de $\left(2^{-1} : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right) . \dfrac{1}{8}$ es:

2 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ $\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

d) La racionalización de $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ es:

$-\sqrt{5}+\sqrt{6}$ $\sqrt{5}-\sqrt{6}$ $-\sqrt{5}-\sqrt{6}$ $\sqrt{5}+\sqrt{6}$

e) El desarrollo de $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ es:

5 $5-2\sqrt{6}$ $5+2\sqrt{6}$ -1

f) Si $a \,.\, b = 1$ y $a = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, entonces el valor de b es:

$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\sqrt{5}$ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

11) El cabello humano crece aproximadamente un centímetro por mes. ¿Cuánto se estima podría crecer en una hora?.

12) Se define el año-luz como la distancia que recorre la luz en un año. Si la luz se desplaza en el espacio con una velocidad de 3.10^5 *km/seg,* calculá a cuántos kilómetros equivale un año luz.

13) La Biblioteca del Congreso tiene aproximadamente 59 millones de libros. Si cada libro tiene en promedio 270 páginas. ¿Cuántas páginas habrá en total en la Biblioteca del Congreso?

14) Se sabe que 10^{28} electrones pesan 9 gramos; que un neutrón pesa 1834 veces más que un electrón, y que *100.000* neutrones pesan lo mismo que *100.014* protones. Calculá la masa, en gramos, de un protón, de un electrón, y de un neutrón.

15) Un cuarto aislado de hospital se llena de oxígeno puro. Sus dimensiones son 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto. Sabiendo que un metro cúbico contiene 1000 litros y que 22,4 litros de cualquier gas contiene $6{,}02.10^{23}$ moléculas (número de Avogadro), ¿cuántas moléculas de oxígeno hay en el cuarto?

16) En promedio hay 7000000 de glóbulos blancos por mililitro de sangre humana. Si se sabe que por cada kilogramo una persona tiene 80 ml de sangre, ¿cuántos glóbulos blancos tendrá una persona que pesa 70 kg?

17) La unidad de masa atómica (uma) tiene $1{,}6606.10^{-27}$ kg. Si el átomo de carbono tiene 12 uma, ¿cuál es en kilógramos la masa de 14000000 átomos de carbono?

18) Escribí cuatro números tales que su aproximación por redondeo a los décimos sea 3,4; de modo que dos de ellos sean mayores que su aproximación y los otros dos sean menores.

19) Calculá dos aproximaciones hasta las milésimas del número racional $\frac{15}{7}$. ¿Cuál de las dos está más próxima a la fracción dada?

20) Calculá la longitud del lado de un cuadrado inscripto en una circunferencia de *8 cm* de radio.

21) Calculá la diagonal de un cubo de arista igual a $\sqrt{3}$ *dm*.

Respuestas a algunas actividades del MÓDULO I

ACTIVIDADES NÚMEROS:

Ejercicio 6:

a) 25

b) $\frac{1}{16}$

c) 1

d) $\frac{4}{9}$

e) 2

f) $a^{-1}b^{-1}c^{2}$

g) 3^{4x}

h) a^{-18}

i) $\frac{3}{2}$

j) $\frac{2}{3}$

k) $\frac{3}{4}$

l) x^2

m) $\sqrt[12]{x^5}$

n) $a^{7/8} = \sqrt[8]{a^7}$

Ejercicio 7:

a) $-3\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$

c) $8\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{x}$

e) $-3\sqrt[3]{2}$

f) $\sqrt[4]{3}$

g) $\frac{-\sqrt{5}}{6}$

h) 0

i) $2x^2\sqrt{x} = 2x^{5/2}$

j) $\sqrt{2a^2b}$

k) $4\sqrt{2}$

l) $m\sqrt[12]{m^{11}}$

m) $b\sqrt[15]{a^{11}b^4}$

n) $2^{-1/6}$

Ejercicio 8:

$2^{-2/3}$

Ejercicio 9:

a) $5\sqrt[3]{4}$

b) $\dfrac{2\sqrt[3]{x^2}}{3}$

c) $\dfrac{2\sqrt[9]{2y}}{y}$

d) $\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}$

e) $4\sqrt[3]{3}$

f) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{3}$

g) $-\left(1-\sqrt{2}\right)$

h) $\dfrac{-\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$

i) $6-2\sqrt{6}$

j) $7\sqrt{2}+2\sqrt{7}$

k) $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{7}$

Ejercicio 10:

a) $\dfrac{1}{6}$

b) $\dfrac{7}{2}$

c) $\dfrac{1}{32}$

d) $-\sqrt{5}-\sqrt{6}$

e) $5+2\sqrt{6}$

f) $b=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Ejercicio 11:
Crece $1,39 \cdot 10^{-3}$ cm por hora

Ejercicio 12:
$9,4608 \cdot 10^{12}$ km

Ejercicio 13:
En la biblioteca del congreso hay $1,593 \cdot 10^{10}$ páginas aproximadamente

Ejercicio 14:
Masa de un electrón: $9 \cdot 10^{-28}$ gramos.
Masa de un neutrón: $1,6506 \cdot 10^{-24}$ gramos.
Masa de un protón: $1,6503 \cdot 10^{-24}$ gramos.

Ejercicio 15:
Hay $4,03125 \cdot 10^{27}$ moléculas.

Ejercicio 16:
Tendrá $3,92 \cdot 10^{10}$ glóbulos blancos.

Ejercicio 17:
$2,789808 \cdot 10^{-19}$ kilógramos.

Ejercicio 20:
Lado = $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ cm

Ejercicio 21:
Diagonal = 3 dm.

POLINOMIOS

Definición: Las expresiones algebraicas del tipo $a.x^n$, con $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se denominan **monomios**. En dicha expresión, ***a*** recibe el nombre de coeficiente y ***n*** indica su grado.

Ejemplo: $4x^3$ es un monomio de grado 3. Su coeficiente es 4.

Definición: Un Polinomio con coeficientes reales es una expresión algebraica que se define de la siguiente manera:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Donde los coeficientes a_0, a_1, … , a_n, son números reales, *x* se denomina indeterminada, y *n* es un número natural o cero.

Observaciones:

- La palabra polinomio se compone de **poli** = muchos y **nomios** = términos.
- Cada término de un polinomio se denomina **monomio**.

Elementos de los Polinomios

Si $a_n \neq 0$, se distinguen los siguientes elementos de un polinomio:

- a_n es el coeficiente principal,
- a_0 es el término independiente,
- *n* es el grado del polinomio.

Ejemplos:

(a) El polinomio $S(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^5 + 7$ tiene como coeficiente principal a -3 y su término independiente es 7;

(b) El polinomio $T(x) = -x^6 - 8x + x^4$ tiene como coeficiente principal a -1 y su término independiente es 0;

(c) El polinomio $Q(x) = -3 - 8x^9 + 5x - 4x^3$ tiene como coeficiente principal a -8 y su término independiente es -3.

Definición: Los polinomios cuyo coeficiente principal es 1, se los denomina **mónicos**.

Ejemplo: $R(x)=x^3+3x^2-\sqrt{2}$ es un polinomio mónico.

Definición: Se denomina **grado de un polinomio** al mayor exponente que tiene la variable "x" de los términos con coeficientes no nulos.

*Notación: El grado de un polinomio P, se denota como **gr (P)**.*

Ejemplos:

(a) El polinomio $S(x)=6x+x^2-7x^5$ tiene grado **5**, porque es el mayor exponente que aparece; es decir, $gr(S)=5$.

(b) El grado del polinomio $Q(x)=10-x^3+x$ es **3**, y se expresa como ***gr (Q) = 3.***

(c) El polinomio $T(x)=7$ tiene grado **0** porque $7=7x^0$; ***gr (T) = 0.***

Observaciones:

- Un **polinomio de grado cero** es de la forma $P(x)=k,\ k\in\mathbb{R}-\{0\}$ y se lo denomina **polinomio constante.** Por ejemplo $T(x)=7$ es un polinomio constante.
- $P(x)=0$ es un polinomio constante especial, ya que siempre vale cero. Recibe el nombre de **polinomio nulo** y decimos que carece de grado.

Clasificación

Según la cantidad de términos, un polinomio se denomina:

- **Monomio**, si tiene *un solo término*.

Ejemplos: $P(x)=3x^2$, $Q(x)=\sqrt{5}$, $T(x)=\frac{1}{2}x^5$

- **Binomio**, si tiene *dos términos.*

Ejemplos: $P(x)=3x^2-7x$, $Q(x)=-x+4$

- **Trinomio**, si tiene *tres términos.*

Ejemplo: $P(x) = x + 3x^2 - 9x^{10}$

- **Cuatrinomio**, si tiene *cuatro términos.*

Ejemplo: $P(x) = 8x^6 - 2x^5 - x + 3$

Conceptos importantes

- Un polinomio de grado *n* está **completo** cuando entre sus términos aparecen todos los exponentes de *n* hasta 0. Si alguno de los términos falta, el polinomio es **incompleto.**

Ejemplos:

(a) El polinomio $R(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 8x + 7$ es un polinomio completo.

(b) El polinomio $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 9$ está incompleto porque faltan los términos correspondientes a x^3 (término cúbico) y a x (término lineal).

Para **completar un polinomio**, se agregan los términos con los exponentes faltantes con coeficientes iguales a cero, como se muestra a continuación:

Ejemplos:

(a) Si se tiene $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 9 \Rightarrow Q(x) = x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 9$ es un polinomio completo.

(b) Considerando $M(x) = 2x^2 - 8 \Rightarrow M(x) = 2x^2 + 0x - 8$ es un polinomio completo.

- Un polinomio está **ordenado** si los grados de sus monomios están ordenados en forma creciente o decreciente.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{l} (a)\ F(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 5 \\ (b)\ G(x) = 7 + x + 3x^2 - x^3 \\ (c)\ H(x) = x^5 + 2x^2 - 7 \end{array}\right\} \text{son polinomios ordenados.}$$

(d) $T(x) = -x^6 - 8x + x^4$ es un polinomio no ordenado.

- Dos polinomios P(x) y Q(x) son **iguales** si son del mismo grado y los coeficientes de los términos semejantes (de igual grado) son iguales. Es decir, si $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x^1 + a_0 x^0$ y $Q(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1 x^1 + b_0 x^0$, son dos polinomios de grado n, entonces P(x) = Q(x) sí y solo si, $a_n = b_n$; $a_{n-1}=b_{n-1}$; ... ; $a_1 = b_1$; $a_0 = b_0$.

- El **polinomio opuesto** al polinomio P(x) es un polinomio que tiene el mismo grado que P(x) y sus coeficientes son los opuestos de los coeficientes de P(x); se nota como -**P(x)**.

Ejemplo: El polinomio opuesto de $P(x)=-7x^2-2x+1$ es $-P(x)=7x^2+2x-1$.

Definición: Dado un polinomio $P(x)$ y $a\in\mathbb{R}$, se llama **valor numérico de** $P(x)$ **o especialización de** $P(x)$ para $x=a$ y notamos $P(a)$, al valor que toma el polinomio al reemplazar la indeterminada **x** por ***a*** y efectuando las operaciones indicadas.

Ejemplos: Calcular el valor numérico de los siguientes polinomios en los valores indicados.

(a) $P(x)=3x^2+x+5$ en $x=1$, $P(1)=3.(1)^2+1+5 \Rightarrow P(1)=9$

(b) $Q(x)=-x^7-2x^2+3$ en $x=1$, $Q(-1)=-(-1)^7-2(-1)^2+3=1-2+3=2 \Rightarrow Q(-1)=2$

OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

Suma y resta

Para hallar la suma de dos o más polinomios **se suman (o restan) los términos semejantes**, es decir, aquellos términos en los que la variable tiene el mismo exponente. Si los polinomios están desordenados, se los puede ordenar para la realizar la operación ya que esto facilita el reconocimiento de los términos semejantes.

Ejemplo: Realizar $M(x)+B(x)$ siendo $M(x)=-\frac{1}{2}x^5+2x^2-5x+3$ y $B(x)=-4x^5+7x^4-x+3$

$$\begin{aligned}
M(x)+B(x) &= -\frac{1}{2}x^5+2x^2-5x+3+\left(-4x^5+7x^4-x+3\right)\\
&= -\frac{1}{2}x^5-4x^5+7x^4+2x^2-5x-x+3+3\\
&= \left(-\frac{1}{2}-4\right)x^5+7x^4+2x^2+(-5-1)x+(3+3)\\
&= \boxed{-\frac{9}{2}x^5+7x^4+2x^2-6x+6}
\end{aligned}$$

Otra manera de realizar la suma podría ser la siguiente:

Ejemplo: Realizar *P(x) + Q(x)*, siendo $P(x)=3x^5+0x^4-4x^3-2x$ y $Q(x)=2x^5 \ -x^4 \ -2x^3+0x$

$$\begin{array}{l} P(x)=3x^5+0x^4-4x^3-2x \\ + \\ Q(x)=2x^5 \ -x^4 \ -2x^3+0x \\ \hline S(x)=5x^5-x^4-6x^3-2x \end{array}$$

El polinomio *S(x)*, suma entre *P(x)* y *Q(x)* es $S(x)=5x^5-x^4-6x^3-2x$

Observación: El grado del polinomio suma es menor o igual que el grado de los polinomios sumados o carece de grado.

*Para **restar** dos polinomios se busca el polinomio opuesto del segundo y se suma lo obtenido al primero.*

Ejemplo: Hallar $P(x)-S(x)$ siendo $P(x)=x^5+2x^4-3x^3-2$ y $S(x)=3x^4-5x^2-3$

$$\begin{aligned} P(x)-S(x) &= \left(x^5+2x^4-3x^3-2\right)-\left(3x^4-5x^2-3\right) \\ &= x^5+2x^4-3x^3-2-3x^4+5x^2+3 \\ &= x^5+(2x^4-3x^4)-3x^3+5x^2+(-2+3) \\ &= x^5+(2-3)x^4-3x^3+5x^2+(-2+3) \\ &= \boxed{x^5-x^4-3x^3+5x^2+1} \end{aligned}$$

Multiplicación

Para multiplicar polinomios se aplica la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada término de un polinomio por los términos del otro y luego se agrupan (sumando o restando) los términos semejantes.

Observación: El grado del producto de dos polinomios no nulos es la suma de los grados de los polinomios factores, es decir $gr\ \left[P(x)\cdot Q(x)\right]=gr\ P(x)+gr\ Q(x)$.

Ejemplo: Multiplicar los polinomios $P(x)=3x^3-2x$ y $Q(x)=7x^2-5$

$$\begin{aligned} P(x).Q(x) &= \left(3x^3-2x\right).\left(7x^2-5\right) \\ &= 3x^3.7x^2+3x^3.(-5)-2x.7x^2-2x.(-5) \\ &= 21x^5-15x^3-14x^3+10x \\ &= \boxed{21x^5-29x^3+10x} \end{aligned}$$

Algunos productos especiales

- Binomio al cuadrado $(A+B)^2 = A^2 + 2.A.B + B^2$
- Binomio al cubo $(A+B)^3 = A^3 + 3.A^2.B + 3.A.B^2 + B^3$
- Producto de binomios conjugados $(A+B).(A-B) = A^2 - B^2$

División

La división entre dos polinomios *P(x)* y *Q(x)* es posible realizarla siempre y cuando *Q(x)* no sea el polinomio nulo y el grado de *P(x)* sea mayor o igual que el grado de *Q(x)*.

Para dividir polinomios se usa un procedimiento similar al de la división entera entre números enteros. Para lo cual el polinomio dividendo *P(x)* debe estar completo y ordenado en forma decreciente y el polinomio divisor *Q(x)*, ordenado en forma decreciente. Obtendremos un polinomio cociente *C(x)* y un polinomio resto *R(x)*.

.

$$\begin{array}{rl|l} \textit{dividendo} \leftarrow & P(x) & \underline{Q(x)} \rightarrow \textit{divisor} \\ \textit{resto} \leftarrow & R(x) & C(x) \rightarrow \textit{cociente} \end{array}$$

Observaciones:

- Siempre se cumple que $P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$
- El polinomio resto, *R(x)*, tiene menor grado que el polinomio divisor o es el polinomio nulo. (Esto indica cuándo finalizar la operación).
- El grado del polinomio cociente *C(x)* es la diferencia entre los grados de *P(x)* y *Q(x*), es decir, $gr\ C(x) = gr\ P(x) - gr\ Q(x)$.

Ejemplo: Dividir el polinomio $P(x) = 8x^4 - 6x^2 + x$ por el polinomio $Q(x) = 2x^2 - 3$

1. Escribimos ambos polinomios en forma decreciente; y el polinomio dividendo completo.

$$8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + x + 0 \quad \underline{|2x^2 - 3}$$

2. Calculamos el cociente entre el termino principal de P(x) y el del divisor Q(x). Esto es $8x^4 / 2x^2 = 4x^2$ Luego multiplicamos este cociente por el divisor y lo restamos de P(x).

$$
\begin{array}{rl}
8x^4+0x^3-6x^2+x+0 & \underline{|2x^2-3} \\
- & 4x^2 \\
\underline{8x^4+0x^3-12x^2} & \\
0x^4+0x^3+6x^2+x+0 &
\end{array}
$$

3. Calculamos ahora el cociente entre el término de mayor grado de la resta y el divisor Q(x). En nuestro ejemplo tenemos $6x^2/2x^2=3$. Multiplicamos el divisor por este cociente y lo restamos al polinomio que obtuvimos en el paso anterior.

$$
\begin{array}{rl}
8x^4+0x^3-6x^2+x+0 & \underline{|2x^2-3} \\
- & 4x^2+3 \\
\underline{8x^4+0x^3-12x^2} & \\
0x^4+0x^3+6x^2+x+0 & \\
- & \\
\underline{6x^2+x+9} & \\
0x^2+x+9 &
\end{array}
$$

Por lo tanto, el polinomio cociente es $C(x)=4x^2+3$ y el polinomio resto es $R(x)=x+9$ (observemos que el grado del polinomio resto es menor al grado del polinomio divisor).

<u>Ejemplo</u>: Si $P(x)=2x^6-4x^2+5$ y $Q(x)=x^3+2x-3$, realizar $P(x):Q(x)$.

$$
\begin{array}{rl}
2x^6+0x^5+0x^4+0x^3-4x^2+0x+5 & \underline{|x^3+2x-3} \\
- & 2x^3-4x+6 \\
\underline{2x^6+4x^4-6x^3} & \\
0x^6+0x^5-4x^4+6x^3-4x^2+0x+5 & \\
- & \\
\underline{-4x^4-8x^2+12x} & \\
0x^4+6x^3+4x^2-12x+5 & \\
- & \\
\underline{6x^3+12x-18} & \\
0x^3+4x^2-24x+23 &
\end{array}
$$

Por lo tanto, el polinomio cociente es $C(x)=2x^3-4x+6$ y el polinomio resto es $R(x)=4x^2-24x+23$.

MÉTODO (REGLA) DE RUFFINI

El método de Ruffini permite realizar, de forma sencilla, divisiones de polinomios en el caso particular en el que el polinomio divisor sea de la forma $Q(x)=x-c$, $c\in\mathbb{R}$.

Procedimiento para hallar el cociente y el resto de dividir al polinomio $P(x)$ ***por*** $Q(x)$ ***:***

1. Escribimos el polinomio *P(x)* en forma decreciente y si el polinomio no es completo agregamos los términos faltantes multiplicados con coeficiente cero:

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x^1+a_0x^0$$

2. Colocamos los coeficientes de *P(x)* de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

3. Como el divisor es $\mathrm{Q}(x)=x-c$, consideramos el valor c :

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ c & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

4. Bajamos el valor del coeficiente principal a_n :

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ c & \downarrow & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

5. Realizamos multiplicaciones y sumas sucesivas con cada uno de los coeficientes hasta llegar al final:

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ c & \downarrow & c\cdot a_n & & & & \\ \hline & a_n & a_{n-1}+c\cdot a_n & & & & \end{array}$$

6. El último número obtenido será el resto de la división y los anteriores a él serán los coeficientes del polinomio cociente.

Ejemplo: Sean $P(x)=2x^3-7x^2+5$ y $Q(x)=x-3$, realizar la división $P(x):Q(x)$ aplicando el método de Ruffini.

Para comenzar escribimos el polinomio *P(x)* en forma decreciente y si el polinomio no es completo agregamos los términos faltantes multiplicados por cero, así resulta:

$$P(x)=2x^3-7x^2+0x+5$$

Como el divisor es $Q(x)=x-3$, tenemos el valor c = 3.

Realizamos la división con la ayuda de una tabla en la que colocamos en la primera fila los coeficientes del polinomio *P(x)* y a la izquierda de la línea vertical colocamos el valor de c. A continuación, describimos los cálculos que se realizan para completar la tabla y hallar así el cociente y el resto de la división.

1. El primer coeficiente de *P(x),* que en este caso es 2, se reescribe en la tercera fila, luego se multiplica por 3 y el resultado se coloca debajo del segundo coeficiente de *P(x).*

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & \downarrow & 6 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

2. Sumamos el segundo coeficiente con el valor que agregamos en el paso anterior y colocamos el resultado debajo de ambos en la tercera fila. Luego multiplicamos este último valor por 3 y colocamos el resultado en la segunda fila debajo del tercer coeficiente *P(x).*

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & \downarrow & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & -1 & & \end{array}$$

3. El proceso se sigue repitiendo hasta completar la tabla.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -7 & 0 & 5 \\ 3 & \downarrow & 6 & -3 & -9 \\ \hline & \underbrace{2 \quad -1 \quad -3}_{\textit{Coeficientes del polinomio cociente}} & & & \underbrace{\boxed{-4}}_{\textit{Resto}} \end{array}$$

El último valor en la tercera fila de la tabla es el *resto de la división*, en este caso es $R(x)=-4$. Los demás valores son los *coeficientes del polinomio cociente* ordenados en forma decreciente. Así en este ejemplo resulta $C(x)=2x^2-x-3$. Finalmente se puede verificar que:

$$P(x)=Q(x).C(x)+R(x)=(x-3).(2x^2-x-3)-4$$

Observación: El polinomio cociente, tiene un grado menos que el polinomio dividendo *P(x)* y el resto es una constante, es decir, el resto es el polinomio nulo o un polinomio de grado cero.

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Definición: Si al dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio no nulo $Q(x)$, el resto es cero, se dice que el polinomio $P(x)$ **es divisible por el polinomio** $Q(x)$ o que $Q(x)$ **divide a** $P(x)$**.**

Ejemplo: Consideremos los siguientes polinomios: $P(x)=x^3+2x+12$, $Q(x)=x-2$, $R(x)=x+2$

(a) ¿Es *P(x)* divisible por *Q(x)*?

(b) ¿Es *P(x)* divisible por *R(x)*?

(Dejamos como tarea pensarlo)

¿Habrá alguna otra manera de saber si un polinomio es divisible por otro sin necesidad de realizar la división entera?

- Si el polinomio divisor es de grado igual o mayor a dos o es un polinomio de grado uno no mónico, se debe realizar la división entera entre los polinomios;
- Si el polinomio divisor es mónico y de grado 1, es posible determinar el resto de la división sin necesidad de efectuar la operación. El teorema siguiente lo explica:

TEOREMA DEL RESTO

El resto de la división entre un polinomio $P(x)$ y un binomio (polinomio) de la forma $(x-a)$, es igual al valor numérico del polinomio cuando x toma el valor "a", que podemos expresar como $P(a)$.

Volviendo a los polinomios *P(x), Q(x)* y *R(x)*, ¿es posible aplicar el teorema del resto? (Lo analizaremos en clase).

RAÍCES REALES DE UN POLINOMIO

Definición: Las **raíces de un polinomio** (también llamadas ceros de un polinomio) son los valores (números reales) para los cuales, el valor numérico del polinomio es igual a cero. Es decir, un valor *a* es una raíz de un polinomio si *P(a)=0*.

Ejemplo: Tenemos el siguiente polinomio: $P(x)=x^2+2x-8$

Hallemos el valor numérico del polinomio para cuando $x=1$:

$$P(1)=1^2+2.1-8=1+2-8=-5\neq 0$$

Por lo tanto, **1 no es un cero o raíz del polinomio**.

Vamos a probar con $x=2$:

$$P(2)=2^2+2.2-8=4+4-8=0$$

Podemos concluir que **2 es un cero o raíz del polinomio** $P(\mathrm{x})$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Definición: **Factorizar un polinomio** significa poder expresarlo como producto de otros polinomios. En muchas ocasiones, factorizar un polinomio resulta útil para resolver ecuaciones, inecuaciones o simplificar expresiones algebraicas.

Para realizar este proceso, se aplican diversos recursos algebraicos, algunos de los cuales analizaremos a continuación.

Casos de Factoreo

Factor común

Una expresión algebraica es **factor común** de todos los términos de otra expresión cuando aparece repetida en cada uno de sus términos.

Para extraer factor común se debe proceder de manera inversa a la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma (o resta).

Primero se debe reconocer cuál es el factor que se encuentra repetido en cada término (considerando el menor exponente visible) y luego, para encontrar la expresión del factor que va entre paréntesis, se divide cada término de la expresión original por el factor común.

Observación: El polinomio que resulta quedar entre paréntesis al sacar factor común, debe tener igual número de términos que el polinomio original dado.

Ejemplos:

(a) Considerando el polinomio $R(\mathrm{x}) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 5x$ se puede observar que se repite la indeterminada *x* en todos los términos. Seleccionamos entonces como factor común a *x* con el menor exponente visible, en este caso 1.

$$\begin{aligned} R(\mathrm{x}) &= x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 5x \\ &= \boxed{x.\left(x^4 + 3x^2 - 2x - 5\right)} \end{aligned}$$

(b) Considerando $Q(\mathrm{x}) = 8x^2 - 4x^3 + 16x^4 + 12x^5$, descomponemos en primos los coeficientes y se selecciona aquel que se repita en todos los términos con el menor exponente visible (al igual que sucede con la letra).

$$\begin{aligned} Q(\mathrm{x}) &= 8x^2 - 4x^3 + 16x^4 + 12x^5 \\ &= 2^3 x^2 - 2^2 x^3 + 2^4 x^4 + 2^2 3 x^5 \\ &= 2^2 x^2.\left(2 - x + 4x^2 + 3x^3\right) \\ &= \boxed{4x^2.\left(2 - x + 4x^2 + 3x^3\right)} \end{aligned}$$

(c) $P(\mathrm{x}) = 7\mathrm{x}^3 + 49x^2 = \boxed{7x^2.\left(x+7\right)}$

Factor común en grupos

Se aplica a expresiones algebraicas que no tienen un factor común en todos sus términos. En primer lugar, si se quiere factorizar una expresión algebraica por este método, se debe tener en cuenta que la misma debe tener un número par de términos (por lo menos cuatro términos). El método es similar al anterior, agrupando los términos que admiten factor común.

Los pasos a seguir son:

1. Se forman grupos de igual cantidad de términos, de forma tal que en cada uno de ellos haya un factor común.
2. En cada término debe aparecer el mismo factor entre paréntesis para poder extraerlo nuevamente.
3. Al sacar nuevamente factor común, la expresión queda factorizada a través del factor común por grupos.

Ejemplos:

(a) Considerando el polinomio x^5-2x^4-3x+6, agrupamos términos que contengan un factor o factores comunes: $\underbrace{x^5-2x^4}\underbrace{-3x+6}$

Extrayendo factor común obtenemos: $x^4.(x-2)-3.(x-2)$

Recordemos que la expresión resultante entre paréntesis debe ser la misma en ambos términos (en este caso x-2), por lo que podemos extraer nuevamente ese factor común, quedando finalmente:

$$(x-2).(x^4-3)$$

(b) En el polinomio $4x^3-1-x^2+4x$ debemos utilizar la propiedad conmutativa de la suma, para poder reordenar de manera conveniente los términos:

$$4x^3+4x-1-x^2$$
$$4x.(x^2+1)-(1+x^2)$$
$$(x^2+1).(4x-1)$$

Observemos que, en este ejemplo, sacamos factor común -1 en el segundo agrupamiento para lograr obtener la misma expresión que se encuentra entre paréntesis en el primer agrupamiento x^2+1.

Trinomio cuadrado perfecto

Para factorizar un trinomio por este método, debemos corroborar que esta expresión algebraica de tres términos sea equivalente a un binomio elevado al cuadrado. Es decir, dos de sus términos deben ser cuadrados perfectos y el otro es el doble producto de las bases de esos cuadrados.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Ejemplos:

(a) Considerando el polinomio $x^2+8x+16$, debemos ver si se tienen dos términos que sean cuadrados perfectos (hallando sus bases) y que el tercero sea el doble producto de las bases.

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & +8x & +16 & = (x+4)^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ (x)^2 & \downarrow & (4)^2 & \\ & 2.x.4 & & \end{array}$$

(b) $x^4+1-2x^2=(x^2-1)^2$

(c) $x^2+10x-25$ no es trinomio cuadrado perfecto ya que -25 no es un cuadrado perfecto.

(d) $36x^2+1-12x=(6x-1)^2$

Diferencia de cuadrados

Toda expresión algebraica que es diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la diferencia de las bases de dichos cuadrados por la suma de las mismas, es decir:

$$a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$$

<u>Ejemplos</u>:

(a) Considerando el polinomio $x^2 - 9$ observamos que se tiene una resta de dos cuadrados. Buscamos las bases y lo expresamos como una suma por diferencia:

$$\underset{(x)^2}{\underset{\downarrow}{x^2}} - \underset{(3)^2}{\underset{\downarrow}{9}} = (x-3).(x+3)$$

(b) $x^4 - 1 = (x^2-1).(x^2+1) = \boxed{(x-1).(x+1).(x^2+1)}$

(c) $x^2 - 5 = \boxed{(x-\sqrt{5}).(x+\sqrt{5})}$

(d) $81 - x^4 = (9-x^2).(9+x^2) = \boxed{(3-x).(3+x).(9+x^2)}$

Factorización de un Polinomio a partir de sus raíces

Recordemos que se llama valor numérico de un polinomio para $x = a$, y lo escribimos $P(a)$, al número que resulta al reemplazar la variable del polinomio por a y realizar todas las operaciones. Por el Teorema del resto, si $P(a) = 0$, decimos que a es raíz del polinomio.

<u>Conclusión</u>:

<u>Definición</u>: Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x-a)$ sí y solo si, a es una raíz de $P(x)$.

Todo polinomio de una variable y de grado n que tenga n raíces reales puede expresarse de **forma factorizada** como:

$$P(x) = a_n.(x-x_1).(x-x_2)...(x-x_n)$$

Siendo a_n el coeficiente principal y $x_1, x_2 ... x_n$ sus raíces.

El **orden de multiplicidad** de una raíz en un polinomio es la cantidad de veces que aparece, en su expresión factorizada, el factor asociado a dicha raíz.

Ejemplo: Si $P(x)=3(x-1).(x+2)^3(x-5)^2$, entonces 1 es raíz simple (o con orden de multiplicidad 1), -2 es raíz triple (o con orden de multiplicidad 3) y 5 es raíz doble (o con orden de multiplicidad 2).

Observaciones:

- Tener un polinomio escrito en forma factorizada nos facilita la tarea de encontrar sus raíces.
- Es importante observar que no todo polinomio tiene raíces reales, pues no siempre una ecuación de la forma *P(x)* = 0 tiene solución en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, el polinomio $P(x)=x^2+5$ no tiene ninguna raíz real, pues la ecuación *P(x)* = 0 no tiene soluciones reales.

Ejemplos: Expresar en forma factorizada a cada uno de los siguientes polinomios y determinar sus raíces reales.

(a) Consideremos el polinomio $P(x)=2x^4-8x^2$:

$$\begin{aligned}P(x)&=2x^4-8x^2 && \rightarrow \textit{extraemos factor común } 2x^2\\ &=2x^2\left(x^2-4\right) && \rightarrow \textit{aplicamos diferencia de cuadrados}.\\ &=2\boxed{x^2(x-2)(x+2)}\end{aligned}$$

Las raíces reales de P son: 0 de orden de multiplicidad 2, 2 de orden de multiplicidad 1 y -2 de orden de multiplicidad 1.

(b) A partir del polinomio $Q(x)=x^4-2x^3+x^2$:

$$\begin{aligned}Q(x)&=x^4-2x^3+x^2 && \rightarrow \textit{extraemos factor común } x^2\\ &=x^2\left(x^2-2x+1\right) && \rightarrow \textit{aplicamos trinomio cuadrado perfecto}\\ &=\boxed{x^2(x-1)^2}\end{aligned}$$

Las raíces reales de Q son: 0 de orden de multiplicidad 2 y 1 de orden de multiplicidad 2.

(c) Considerando el polinomio $R(x)=2x^6-32x^2$*:*

$$\begin{aligned}R(x)&=2x^6-32x^2 && \rightarrow \textit{extraemos factor común } 2x^2\\ &=2x^2\left(x^4-16\right) && \rightarrow \textit{aplicamos diferencia de cuadrados}\\ &=2x^2\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right) && \rightarrow \textit{aplicamos nuevamente diferencia de cuadrados}\\ &=\boxed{2x^2(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}\end{aligned}$$

Las raíces reales de R son: 0 de orden de multiplicidad 2, 2 de orden de multiplicidad 1 y -2 de orden de multiplicidad 1.

ACTIVIDADES

1) Indicar si las siguientes expresiones son polinomios. En caso afirmativo, indicar su grado, coeficiente principal y término independiente.

- **a)** $P(x)=2x-x^2$
- **b)** $Q(x)=1$
- **c)** $R(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$
- **d)** $T(x)=2\sqrt{x}+x^2-1$
- **e)** $P(x)=2x^8+\pi$

2) Indicar si los polinomios están ordenados y/o completos. En caso de no estarlo, escribirlos ordenados y completos.

- **a)** $P(x)=x^4-2x^3+x^2+5x-12$
- **b)** $Q(x)=3+\dfrac{1}{2}x^3-5x+\dfrac{3}{2}x^2$
- **c)** $S(x)=-5x-3+2x^2$
- **d)** $T(x)=-1+4x^3$
- **e)** $M(x)=x^3+\dfrac{1}{4}x^5-2$

3) Escribir, si es posible, los polinomios que cumplan con las siguientes características:

- **a)** Es un trinomio de grado 4, su coeficiente principal es 9, tiene un término cúbico con coeficiente -1 y su término independiente es -6.
- **b)** Es mónico completo de grado impar mayor que tres, de forma tal que, ordenado, cada coeficiente sea el doble del que le sigue.
- **c)** Es completo de grado seis, de forma tal que los monomios de grado par tengan coeficientes racionales y los de grado impar tengan coeficientes irracionales.
- **d)** Es completo de grado seis, de forma tal que, en cada monomio, la diferencia entre el coeficiente y el exponente sea siempre igual 2.

4) Encontrar la especialización o valor numérico de los siguientes polinomios.

- **a)** $P(x)=2x^3-4x^2+2x-3$ para $x=-1$

b) $S(x)=4x^2-5x+2$ para $x=0$

c) $Q(x)=x^4-x^2+5$ para $x=\frac{1}{2}$

5) Hallar el valor m ∈ R en los siguientes polinomios, para que se cumplan las condiciones indicadas en casa caso:

a) $P(x)=x^3+2x^2+x^4-mx$ y $P(-1)=3$

b) $Q(x)=x^4-\frac{1}{3}x^2-m$ y $Q(1)=2$

c) $S(x)=-x^2+3\sqrt{5}x-m$ y $S(\sqrt{5})=0$

6) Hallar $a\in\mathbb{R}$ de forma tal que la especialización de $F(x)=3x^4+ax^2-2x-5$ sea igual a 6 cuando x es igual al coeficiente principal del polinomio.

7) Dados los polinomios $P(x)=3x^3-5x+2$, $Q(x)=4x^2+x-1$ y $R(x)=2x-3$, resolver las siguientes operaciones y escribir al polinomio resultado ordenado en forma decreciente.

a) $P(x)+Q(x)$

b) $-2.P(x)+\frac{1}{2}.R(x)$

c) $[R(x)]^2-Q(x).x$

d) $P(x)-R(x)$

e) $P(x).R(x)+Q(x)$

8) Dados los polinomios $M(x)=2x^3-5x^2+x+6$ y $N(x)=\left(3x+\frac{1}{3}\right)^2$, hallar $P(x)$, sabiendo que $2.N(x)+P(x)=M(x)$.

9) Resolver las siguientes divisiones. Indicar el cociente y el resto de cada una y realizar la comprobación.

a) $(4x^2+5x-6):(2x+4)$

b) $(-x+4x^3-2x^6-x^4):(x^3+x+1)$

c) $(4x^4-6x^2+8):(x^2-4)$

d) $\left(x^7 - 2x^6 - 6x + 1\right) : \left(x^3 + 2x\right)$

10) En cada inciso, encontrar, si existe, un polinomio $M(x)$ que verifique:

a) $3x^5 - 6x^4 - 3x + 6 = \mathrm{M}(x).\left(x^3 - 2x^2 + x - 2\right)$

b) $x^5 - \mathrm{x}^4 - 16\mathrm{x} + 16 = \mathrm{M}(x).\left(-2x^2 + x\right)$

11) Encontrar $Q(x)$ sabiendo que: $3x^4 - x^3 - 6x^2 - 5 = Q(x).(x-1) + (3x - 12)$

12) Hallar el polinomio dividendo $P(x)$ sabiendo que el resto es $R(x) = 3x^2 + x$, el cociente $C(x) = x^3.R(x)$ y el divisor $Q(x)$ es $Q(x) = x^4.R(x)$.

13) Resolver cada una de las siguientes divisiones; cuando sea posible aplicando la Regla de Ruffini. Luego, escribir el polinomio cociente $C(x)$ y el polinomio resto $R(x)$.

a) $\left(8x^2 - 3x + 4\right) : (x - 4)$

b) $\left(x^3 - 3x - 30\right) : (x + 2)$

c) $\left(4x^5 + 2x^3 - x + 6\right) : \left(x^2 + 1\right)$

d) $\left(x^7 - 2x^6 - 6x + 1\right) : \left(x^3 + 2x\right)$

e) $\left(6x^7 - 2x^6 - x^4 + x\right) : (x - 1)$

f) $\left(x^4 + \dfrac{2}{3}x^2 - x + 2\right) : (x + 3)$

14) Determinar, justificando la respuesta, si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.

a) $P(x) = x^3 - 8 \quad y \quad Q(x) = x - 2$

b) $P(x) = 2x^7 + 3x^6 + 18x^3 + 29x + 10 \quad y \quad Q(x) = x + 1$

c) $P(x) = x^2 - 5x + 6 \quad y \quad Q(x) = x - 3$

15) Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $P(x)$ resulte divisible por $T(x)$.

a) $P(x) = x^3 + kx^2 + k + 4 \quad y \quad T(x) = x - 1$

b) $P(x)=kx^4-4x^3+16kx-16 \quad y \quad T(x)=x+2$

16) Determinar, en cada caso, cuáles de los números indicados son raíces del polinomio dado en cada caso:

a) $P(x)=3x^2+5x-2 \qquad x=-2, x=-1 \ y \ x=\frac{1}{3}$

b) $P(x)=-2x^3+x^2-x-1 \qquad x=2, x=-1 \ y \ x=-\frac{1}{2}$

17) A partir de la expresión factorizada de los siguientes polinomios, determinar grado, raíces y sus órdenes de multiplicidad. ¿Alguno de ellos es mónico?

$a)\ P(x)=2.(x-5).(x+6)$

$b)\ P(x)=(x+3).(x+3).(x-2)$

$c)\ P(x)=-3.(x+1).(x+1).(x+1)$

$d)\ P(x)=x.(x-2)^5.(x+3)^2$

18) Expresar en forma factorizada a cada uno de los siguientes polinomios y determinar sus raíces reales.

a) $P(x)=x^3-4x$

b) $P(x)=x^3-2x^2-3x+6$

c) $P(x)=4x^3-1-x^2+4x$

d) $P(x)=25x^4+10x^3-5x^2$

e) $P(x)=x^4+1+2x^2$

f) $P(x)=x^2-10x+25$

g) $P(x)=3x^2-15$

h) $P(x)=x^5+20x^3+100x$

i) $P(x)=19x^4-4x^4$

j) $P(x)=(x^4-18x^2+81).(x^5+4x^3)$

k) $P(x)=x^4-1$

RESPUESTAS DE LAS ACTIVIDADES

1)

$a)$ Sí; $\mathrm{gr}(\mathrm{P})=2$; $a_n=-1$; $a_0=0$

$b)$ Sí; $\mathrm{gr}(\mathrm{Q})=0$; $a_n=1$; $a_0=1$

$c)$ No.

$d)$ No.

$e)$ Sí; $\mathrm{gr}(\mathrm{P})=8$; $a_n=2$; $a_0=\pi$

2)

$a)$ El polinomio P está completo y ordenado en forma decreciente.

$b)$ El polinomio Q está completo. $Q(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-5x+3$

c) El polinomio S está completo. $S(x)=2x^2-5x-3$

$d)$ El polinomio T es creciente. $T(x)=-1+0x+0x^2+4x^3$

$e)$ El polinomio M no está completo ni ordenado. $M(x)=\frac{1}{4}x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x-2$

3)

$a)$ $P(x)=9x^4-x^3-6$

$b)$ $P(x)=x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}$ Hay otras respuestas posibles.

$c)$ $P(x)=\frac{3}{5}x^6+\pi x^5+9x^4-\sqrt{2}x^3+5x^2+\sqrt{3}x+\sqrt{64}$ Hay otras respuestas posibles.

4)

$a)$ $P(-1)=-11$

$b)$ $S(0)=2$

$c)$ $Q\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{77}{16}$

5)

$a)\ \mathrm{m}=1$

$b)\ \mathrm{m}=-\dfrac{4}{3}$

$c)\ \mathrm{m}=10$

6)

$$\alpha=-\frac{226}{9}$$

7)

$a)\ \mathrm{P}(\mathrm{x})+\mathrm{Q}(\mathrm{x})=3\mathrm{x}^3+4\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+1$

$b)\ -2\mathrm{P}(\mathrm{x})+\dfrac{1}{2}\mathrm{R}(\mathrm{x})=-6\mathrm{x}^3+11\mathrm{x}-\dfrac{11}{2}$

$c)\ \left[\mathrm{R}(\mathrm{x})\right]^2-\mathrm{Q}(\mathrm{x}).\mathrm{x}=-4\mathrm{x}^3+3\mathrm{x}^2-11\mathrm{x}+9$

$d)\ \mathrm{P}(\mathrm{x})-\mathrm{R}(\mathrm{x})=3\mathrm{x}^3-7\mathrm{x}+5$

$e)\ \mathrm{P}(\mathrm{x}).\mathrm{R}(\mathrm{x})+\mathrm{Q}(\mathrm{x})=6\mathrm{x}^4-9\mathrm{x}^3-6\mathrm{x}^2+20\mathrm{x}-7$

8)

$$\mathrm{P}(\mathrm{x})=2\mathrm{x}^3-23\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+\frac{52}{9}$$

9)

$a)\ \mathrm{C}(\mathrm{x})=2\mathrm{x}-\dfrac{3}{2}\quad ;\quad \mathrm{R}(\mathrm{x})=0$

$b)\ \mathrm{C}(\mathrm{x})=-2\mathrm{x}^3+\mathrm{x}+6\quad ;\quad \mathrm{R}(\mathrm{x})=-\mathrm{x}^2-8\mathrm{x}-6$

$c)\ \mathrm{C}(\mathrm{x})=4\mathrm{x}^2+10\quad ;\quad \mathrm{R}(\mathrm{x})=48$

$d)\ \mathrm{C}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^4-2\mathrm{x}^3-2\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+4\quad ;\quad \mathrm{R}(\mathrm{x})=-8\mathrm{x}^2-14\mathrm{x}+1$

10)

$a)\ \ M(x)=3x^2-3$

$b)$ No es posible.

11)

$$Q(x)=3x^3+2x^2-3x-6$$

12)

$$P(x)=9x^{11}+6x^{10}+x^9+3x^2+x$$

13)

$a)\ \ C(x)=8x+29 \quad ; \quad R(x)=120$

$b)\ \ C(x)=x^2-2x+1 \quad ; \quad R(x)=-32$

$c)\ \ C(x)=4x^3-2x \quad ; \quad R(x)=x+6$

$d)\ \ C(x)=x^4-2x^3-2x^2+4x+4 \quad ; \quad R(x)=-8x^2-14x+1$

$\mathrm{e})\ \ C(x)=6x^6+4x^5+4x^4+3x^3+3x^2+3x+4 \quad ; \quad R(x)=4$

$f)\ \ C(x)=x^3-3x^2+\dfrac{29}{3}x-30 \quad ; \quad R(x)=92$

14)

$a)$ Sí

$b)$ No

$c)$ Sí

15)

$a)\ \ k=-\dfrac{5}{2}$

$b)\ \ k=1$

16)

$a)\ \ x=-2,\ \text{Sí};\quad x=-1,\ \text{No};\quad x=\dfrac{1}{3},\ \text{Sí}.$

$b)\ \ x=2,\ \text{No};\quad x=-1,\ \text{No};\quad x=-\dfrac{1}{2},\ \text{Sí}.$

17)

$a)$ $gr(P)=2$. Las raíces de $P(x)$ son: $x=5$ y $x=-6$ ambas tienen orden de multiplicidad 1.

$b)$ $gr(P)=3$. Las raíces de $P(x)$ son: $x=-3$ y su orden de multiplicidad es 2 y $x=2$ y su orden de multiplicidad es 1. El polinomio P es mónico.

$c)$ $gr(P)=3$. La raíz de $P(x)$ es $x=-1$ y su orden de multiplicidad es 3.

$d)$ $gr(P)=8$. Las raíces reales de $P(x)$ son: $x=0$ y su orden de multiplicidad es 1, $x=2$ y su orden de multiplicidad es 5 y $x=-3$ con orden de multiplicidad 2. El polinomio P es mónico.

18)

$a)$ $P(x)=x(x-2)(x+2)$ Las raices de $P(x)$ son $x=0, x=2$ y $x=-2$

$b)$ $P(x)=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-2)$ Las raíces de $P(x)$ son $x=\sqrt{3}, x=-\sqrt{3}$ y $x=2$

$c)$ $P(x)=(x^2+1)(4x-1)$ La raíz real de $P(x)$ es $x=\dfrac{1}{4}$

$d)$ $P(x)=5x^2(5x^2+2x-1)$ Las raíces reales de $P(x)$ son $x=0$, $x=\dfrac{-1+\sqrt{6}}{5}$ y $x=\dfrac{-1-\sqrt{6}}{5}$

$e)$ $P(x)=(x^2+1)^2$ No tiene raíces reales.

$f)$ $P(x)=(x-5)^2$ La raíz de $P(x)$ es $x=5$ y su orden de multiplicidad es 2

$g)$ $P(x)=3(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ Las raíces de $P(x)$ son $x=\sqrt{5}$ y $x=-\sqrt{5}$

$h)$ $P(x)=x(x^2+10)^2$ La raiz real de $P(x)$ es $x=0$

$i)$ $P(x)=15x^4$ La raíz de $P(x)$ es $x=0$ cuyo orden de multiplicidad es 4

$j)$ $P(x)=(x-3)^2(x+3)^2x^3(x^2+3)$ Las raíces reales de $P(x)$ son $x=3, x=-3$ y $x=0$

$k)$ $P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ Las raíces reales de $P(x)$ son $x=1$ y $x=-1$

1.9.0 EL LENGUAJE ALGEBRAICO

> Los babilonios tuvieron gran conocimiento de las técnicas algebraicas y, más tarde, los griegos se valieron de la geometría para resolver problemas algebraicos.
>
> La palabra Álgebra tiene su origen en el título del libro *"Aljabr w´al muqabalah"* que fue escrito en Bagdad hacia el año 825 por un matemático musulmán llamado Al-Khwarizmi.

Un poco de historia

En los inicios de la Matemática las fórmulas y las ecuaciones, así como sus resoluciones, se expresaban verbalmente. La utilización del lenguaje algebraico –por ejemplo, los signos que representan las operaciones aritméticas (+, –, ×, ÷, √, ...) o las letras (x, y, z, a, b, ...) para nombrar las incógnitas– que agilizó el cálculo y facilitó los desarrollos, se introdujo recién a partir de los siglos XVI y XVII.

Entre los numerosos problemas aritméticos hallados en los papiros egipcios, se encuentran algunos de tipo algebraico, como la siguiente expresión que figura en el famoso papiro de Rhind (1650 a. C.):

☞ *Un montón y una séptima parte del mismo es igual a 24*

En el lenguaje actual esta expresión la podemos escribir: $x + {}^{1}\!/_{7}\, x = 24$ donde "*x*" representa el "montón" al que se refiere el autor.

De las palabras a los símbolos

El lenguaje algebraico sirve para expresar los problemas con más claridad.

Antiguamente los problemas matemáticos se planteaban y resolvían utilizando el lenguaje natural; con el transcurso del tiempo las palabras se fueron sustituyendo por símbolos hasta llegar a las expresiones algebraicas que utilizamos actualmente.

Lenguaje coloquial	**Lenguaje simbólico**
• El duplo de un número natural.	$2n$
• el cuadrado del triple de n.	$(3n)^2$
• dos números pares consecutivos.	$2n;\ 2n+2$
• la distancia recorrida por un móvil es igual a su velocidad por el tiempo que está en movimiento.	$d = v\,t$
• el volumen de una esfera es igual al producto de 4/3 π por el cubo de su radio.	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
• el cuadrado de la diferencia de dos números es igual a la suma de sus cuadrados menos el doble de su producto.	$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Las igualdades en las que intervienen expresiones algebraicas son frecuentes. Las hay de distintos tipos: identidades, fórmulas, ecuaciones.

1.9.1 IDENTIDADES

Una identidad es una igualdad algebraica cierta para todo valor de las variables que intervienen.

Algunas de las que ya conoces son las siguientes:

- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a(b + c) = ab + ac$
- $a^n . a^m = a^{n+m}$

Estas identidades sirven para transformar una expresión algebraica en otra más simple o cómoda de usar.

FÓRMULAS

¿?

Escribí algunas fórmulas que recuerdes.

Las fórmulas son expresiones que simplifican los enunciados de las leyes y principios de todas las ciencias.

La igualdad: $d = v\ t$ relaciona tres magnitudes físicas (distancia, velocidad, tiempo). Desde el punto de vista algebraico es una ecuación que liga tres variables, si conocemos el valor de dos de ellas podemos calcular el de la tercera.

1.9.3 ECUACIONES

La palabra ecuación viene del latín ***aequare*** que significa igualar.

Obtener la solución de una ecuación es, como lo analizaremos en los próximos temas, encontrar el o los valores de las incógnitas con los que se logra igualar los dos miembros de la misma.

Una ecuación es una propuesta de igualdad.

Las siguientes expresiones son ecuaciones:

(a) $2x + 1 = 27$
(b) $l^2 = 4$
(c) $3x + 4y = 0$
(d) $x^3 = 81$
(e) $x^2 + 4 = 0$
(f) $x^2 - 2x + 1 = 0$

Nos detenemos a analizar las ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita; es decir, de la forma:

$$\boxed{ax + b = 0 \quad , \quad con\ a, b \in \Re \ , \ a \neq 0 \quad , \quad x : incógnita}$$

Planteo de ecuaciones

Plantear una ecuación es convertir un enunciado en lenguaje coloquial al lenguaje algebraico. Después de fijar la incógnita de un problema cada información del enunciado se transforma en una expresión algebraica.

(1) Pienso un número, lo duplico, le sumo 5 y el resultado es 11. ¿Cuál es el número?

Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
• número pensado	x
• duplico	$2x$
• sumo 5	$2x+5$
• resultado es 11	$2x+5=11$

Solución de ecuaciones

Resolver la ecuación significa responder a la pregunta: ¿para qué valor de la variable se verifica la igualdad?

Existen distintos métodos, y se puede elegir el que resulte más adecuado para cada problema, el más utilizado es el de transposición.

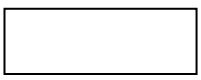
Calculemos la solución de los ejemplos planteados por el método de transposición:

> Hay ecuaciones sin solución. Significa que no se cumplen para ningún valor de la(s) variable(s).
> Hay ecuaciones con infinitas soluciones. Significa que es verdadera para cualquier valor de la(s) variable(s).

$2x+5=11$	• ecuación original.
$2x=11-5$	• se suma –5.
$x=\frac{6}{2}=3$	• se multiplica por ½.
$S=\{3\}$	• Solución.

$$Verificación:\ 2.3+5=11$$

(2) En un rectángulo un lado es 5 cm. más largo que el otro, si el perímetro mide 32 cm. ¿cuánto mide cada lado?

Dibujo	Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
x  $x+5$	• lado más corto	x
	• lado más largo	$x+5$
	• perímetro	$2x+2(x+5)$
	• perímetro igual a 32	$2x+2(x+5)=32$

Solución

$2x+2(x+5)=32$	• ecuación original.
$2x+2x+10=32$	• propiedad distributiva.
$4x+10=32$	• se opera en el primer miembro.
$4x=32-10$	• se suma –10.

$$4x = 22$$

- se resuelve el segundo miembro.

$$x = \frac{22}{4} = 5{,}5$$

- se multiplica por ¼.

$$Solución: \begin{cases} lado\ menor: 5{,}5\,cm. \\ lado\ mayor: 10{,}5\,cm. \end{cases}$$

$$Verificación:\ 2.5{,}5 + 2(5{,}5 + 5) = 11 + 2.10{,}5 = 11 + 21 = 32$$

☞ Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d.C. De su vida no se sabe mucho, pero en el epitafio de su tumba aparecen algunos detalles sobre ella.

Diofanto vivió en Alejandría aproximadamente en el año 250 a.C. Escribió un libro titulado *Aritmética,* el cual se considera como el primero acerca de álgebra. En él se plantean métodos para obtener soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. Este texto se ha leído por más de mil anos. Fermat hizo algunos de sus más importantes descubrimientos mientras estudiaba este libro. La principal contribución de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aunque su simbolismo no es tan sencillo como el que se utiliza hoy en día, fue un avance importante en comparación con escribir con palabras. En **la notación de** Diofanto la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

$$\Delta K^{\gamma}\, \alpha \varsigma \theta \Delta^{\gamma}\, \eta M \varepsilon \iota \kappa \delta$$

Nuestra moderna notación algebraica no se utilizó de forma común sino hasta el siglo XVII.

• *Caminante!. Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar, oh maravilla! La duración de su vida*	x
• *Cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia*	$\frac{x}{6}$
• *Había transcurrido además una duocémina parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12}$
• *A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7}$
• *Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5$
• *Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2}$
• *Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$
• *Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte.*	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$
La edad de Diofanto es	$x = 84$

☞ **Más ejemplos.**

Calculá si existe la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $x + 8 = 3$

$x = 3 - 8 = -5$ $\qquad S = \{-5\}$

b) $2x - 3 = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{1}{2} + 3$ $\qquad S = \left\{\frac{7}{4}\right\}$

$x = \frac{7}{4}$

c) $3x - 1 = -2x + 4$

$3x + 2x = 4 + 1 = 5$ $\qquad S = \{1\}$

$5x = 5 \rightarrow x = 1$

d) $4 - 5(4x - 2) = x - 3(2x + 1)$

$4 - 20x + 10 = x - 6x - 3$

$-20x - x + 6x = -3 - 4 - 10$ $\qquad S = \left\{\frac{17}{15}\right\}$

$15x = 17$

e) $5 - 2\,(x + 3) = \dfrac{-1}{2}\left(4\,x + 2\right)$

$5 - 2\,x - 6 = -2\,x - 1$

$-2\,x + 2\,x = -1 + 6 - 5$

$0x = 0$

$S = R$

Esto implica que cualquier x $\in$ R es solución de la ecuación, esto es, la ecuación tiene infinitas soluciones.

f) $3\,x - 1 = 6\left(\dfrac{x}{2} + 5\right)$

$3x - 1 = 3\,x + 30$

$3\,x - 3\,x = 30 + 1$

$0\,x = 31$

$S = \phi$

Esto es un absurdo, lo que quiere decir que no existe ningún valor que satisfaga la ecuación. Decimos que el conjunto solución es vacío.

Otros tipos de ecuaciones con una incógnita.

Si el producto de varios factores es cero, por lo menos uno de ellos es cero.

Si a.b=0 entonces a=0 o b=0.

Usando esta propiedad es posible resolver ecuaciones no lineales con una variable, como las de los próximos ejemplos.

☞

a) $-8(x-1)=0$

b) $(3x+2)x=0$

c) $(3x+2)(5-x)(\sqrt{3}-2x)=0$

d) $\dfrac{3-2x}{x+2}=0$

e) $\dfrac{2-2(x-1)}{-2x+4}=0$

<u>SOLUCIONES:</u>

(a) $-8(x-1)=0$

$como\ -8 \neq 0 \Rightarrow x-1=0\ luego\ x=1 \therefore S=\{1\}$

(b) $(3x+2)x=0$

debe ser $3x+2=0$

ó $x = 0$

si $3\,x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

$\therefore S = \left\{0, -\dfrac{2}{3}\right\}$

(c) $(3x+2)(5-x)(\sqrt{3}-2x)=0$

debe ser $3x+2=0$ ó $5-x=0$ ó $\sqrt{3}-2x=0$

si $3x+2=0 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$

si $5-x=0 \Rightarrow x=5$

si $\sqrt{3}-2x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\ S=\left\{-\frac{2}{3},5,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Los valores que anulan un cociente son los que anulan el numerador, pero no el denominador, ya que éste debe ser distinto de cero.

(d) $\dfrac{3-2x}{x+2}=0$

Para que se anule el cociente debe ser

$3-2x=0$ y $x+2\neq 0$

De $3-2x=0 \rightarrow x=\dfrac{3}{2}$ Como este valor no anula el denominador, es solución de la ecuación. $\therefore$ $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

(e) $\dfrac{2-2(x-1)}{-2x+4}=0$; $x\neq 2$

Debe ser $-2x+4\neq 0 \rightarrow x\neq \dfrac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}_{\,1}} \rightarrow x\neq 2$

Pero si $2-2(x-1)=0 \rightarrow 2-2x+2=0 \rightarrow -2x+4=0$

$x = 2$

El conjunto solución es vacío, ya que el cociente es distinto de 0 para todo x para el que está definido. $\therefore$ $S=\phi$

ACTIVIDADES

1) Escribí en lenguaje algebraico las siguientes afirmaciones relativas a la base $\boldsymbol{x}$ y la altura y de un rectángulo.

a) La base es el doble de la altura.
b) La base excede en 5 unidades a la altura.
c) La altura es $\frac{2}{5}$ de la base.
d) La base es a la altura, como 7 es a 3.
e) El área de un rectángulo es 50 cm^2
f) La base y la altura difieren en 10 unidades

2) Expresá en forma simbólica los siguientes enunciados:

a) El área *A*, de un círculo es el cuadrado de su radio *r* por π.
b) En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa *a*, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos *b* y *c*.
c) La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 23.
d) Si al triple de 8 le quitamos 5, obtenemos lo mismo que si al doble de 9 le sumamos 1.

3) Asociá, si es posible, cada expresión con su traducción coloquial. En caso negativo, escribí la traducción correspondiente.

$3 \cdot b^3 - b^2$ $\quad 3 \cdot \sqrt{x-1}$ $\quad x^3 - 3x$ $\quad \left(b - b^2\right)^2$ $\quad \left(x^2 - x^3\right)^3$ $\quad 3 \cdot \sqrt[3]{2x-1}$

a) La diferencia entre el cuadrado de un número y su triple.
b) El triple de la raíz cúbica de la diferencia entre el doble de un número y dos.
c) El cubo de la diferencia entre el cuadrado de un número y su cubo.
d) La diferencia entre el triple del cubo de un número y su cuadrado.
e) El triple de la raíz cuadrada del anterior de un número.

4) En cada caso, indicá la expresión que corresponde al enunciado:

a) Andrés (A) es 4 años mayor que Nicolás (N).

i. $A = N + 4$ $\quad$ ii. $N = A + 4$ $\quad$ iii. $A = 4 - N$

b) La suma de los cuadrados de dos números distintos es igual a 25.

i. $(x+y)^2 = 25$ $\quad$ ii. $x^2 + y^2 = 25$ $\quad$ iii. $x + y^2 = 25$

c) El triple de un número es igual al doble de su consecutivo.

i. $3t = 2t + 1$ $\quad$ ii. $t + 3 = 2t + 1$ $\quad$ iii. $3t = 2(t+1)$

d) La suma de tres números consecutivos es 63.

i. $3x = 63$ $\quad$ ii. $x + x + 1 + x + 2 = 63$ $\quad$ iii. $3(x+1) = 63$

e) La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 23.

i. $x^2 - \left(x^2+1\right) = 23$ $\quad$ ii. $(x+1)^2 - x^2 = 23$ $\quad$ iii. $\left(x^2+1\right) - x^2 = 23$

5) Completá para llegar al resultado:

a) $b + \ldots = 2b$ $\quad$ **b)** $y \ldots y = y^2$ $\quad$ **c)** $x^2 + x^2 = \ldots x^{\cdots}$

d) $p^2 \cdot \ldots = p^5$ $\quad$ **e)** $\ldots + c^2 = 2c^2$ $\quad$ **f)** $x \ldots x \ldots x = x^3$

6) Completá utilizando propiedades y productos notables:

a) $-(1-a+z)=\ldots 1\ldots a\ldots z$

b) $\ldots\cdot(x+b)=x^2+bx$

c) $(a+b)^2=\ldots+b^2+2a\ldots$

d) $(a\ldots 5)^2=a^2-10a+25$

e) $a+\ldots(a+b)=3a+2b$

7) Del quíntuplo de un número se resta 26 y queda el triple del número. Calculá dicho número e indicá a qué conjunto numérico pertenece.

8) La suma de tres números enteros consecutivos es 48 ¿Cuáles son los números?

9) La tercera parte de la suma de dos números consecutivos es igual a la mitad del mayor de ellos. ¿Cuáles son los números?

10) Calculá la cuarta parte de un número si se sabe que la mitad de dicho número es igual a las tres quintas partes del mismo, aumentadas en dos unidades. Indicá a que conjunto numérico pertenece.

11) El promedio entre un número y sus dos consecutivos inmediatos es igual a las dos séptimas partes del número más seis unidades. ¿Cuáles son los números?

12) Entre las 8 y las 9 de la mañana una pileta vacía se llena hasta la cuarta parte. A las 10 se agrega una tercera parte más, y a las 11 se adiciona la mitad de lo que faltaba. Si todavía faltan 50000 litros para que la pileta esté llena, ¿qué capacidad tiene la pileta?

13) Para ir a ver a su novia, Luis recorre la quinta parte del camino en moto. Un problema en la moto lo obliga a tomar un colectivo en el que recorre la tercera parte del camino que le falta. El último tramo de 12 km lo hace a pie. ¿Cuántos kilómetros separaban a Luis de su novia?

14) Se debe distribuir una bonificación de $300000 entre 500 empleados de una fábrica.
Hay 50 hombres de 20 años de servicio, 100 con 10 años y 350 con 5 años. El que tiene 20 años de trabajo recibirá el doble que el que tiene 10, y a su vez, éste, el doble que el de 5 ¿Cuánto corresponde a cada tipo de empleado?

15) Un padre tiene 33 años y su hijo 10. ¿Cuándo la edad del padre será el duplo de la del hijo?

16) La edad actual de un padre es el triple que la de su hija. Hace siete años, la suma de las edades era igual a la edad actual del padre. ¿Cuántos años tienen padre e hija?

17) Una persona compra un electrodoméstico que cuesta $1170 pagando las dos quintas partes en efectivo y el resto en tres cuotas. Las tres cuotas cumplen las siguientes condiciones: la primera es igual a las tres cuartas partes de la segunda, y la segunda es las dos terceras partes de la tercera. ¿Cuál es el importe de cada cuota?

18) La diagonal de un rectángulo forma con los lados un triángulo de 12 cm de perímetro. La longitud de los lados del triángulo corresponden a tres números enteros consecutivos. Encontrá la longitud de los lados del rectángulo y la de la diagonal.

19) Si a la longitud de uno de los lados de un cuadrado se la aumenta en 5 cm y a la del lado contiguo en 3 cm, el área de la figura aumenta en 71 cm^2. Determiná la longitud del lado del cuadrado original.

20) Un grupo de personas gana una rifa y cada una recibe \$270. Si hubieran tenido que compartir el premio con cuatro personas más, le hubieran tocado \$54 menos a cada uno. ¿Cuántas personas participaron de la rifa?

21) Si el precio de un artículo aumenta en un 20% resulta 36 dólares más caro que si su precio se disminuye en un 4%. ¿Cuál es el costo del artículo?

22) Calculá, si existe, la solución de las siguientes ecuaciones e indicá a qué conjunto numérico pertenece:

a) $-3x+4=2x-20$

b) $3.(x-2)+5x=\frac{4}{9}x+2$

c) $2.(x+1)-3.(x-1)=2.\left(1-\frac{1}{2}x\right)+3$

d) $\frac{5-x}{3}-\frac{1-2x}{2}-\frac{x-1}{6}=0$

e) $\sqrt{2x+5}=6$

f) $\frac{3x+5}{6}+\frac{x}{18}-\frac{5x+4}{9}=1$

g) $-4.(x-3)=0$

h) $\sqrt{5}x+\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)=-6$

i) $(3x+2).(x-1)=0$

j) $-\frac{1}{2}.\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$

k) $-\frac{x^3+3}{3}+\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{3}x^2\cdot x+0,5\right)$

l) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3=-2^{-3}$

m) $\sqrt{5}x+\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)=-6$

n) $\frac{1}{5}x^2-\left(\sqrt{40}+7\right)=-\frac{9}{2}-2\sqrt{10}$

o) $\left(\sqrt{3}-1\right)x-\frac{x^2-4}{2}=-2^{-1}x^2$

p) $\frac{4}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{26}{x^2-1}$

q) $\frac{1}{x}=\frac{4}{3x}+1$

r) $\frac{-3x+4}{x-2}=0$

s) $\frac{(2x-3).(x-2)}{2-x}=0$

Ejercicio 4:

- **a)** Opción i)
- **b)** Opción ii)
- **c)** Opción iii)
- **d)** Opción ii)
- **e)** Opción ii)
- **f)** Opción ii)

Ejercicio 7:
El número es 13.

Ejercicio 8:
Los números son 15, 16 y 17.

Ejercicio 9:
Los números son 1 y 2.

Ejercicio 10:
La cuarta parte del número es – 5.

Ejercicio 11:
Los números son 7, 8 y 9.

Ejercicio 12:
La pileta tiene una capacidad de 240000 litros.

Ejercicio 13:
Separaban a Luis de su novia 22,5 km

Ejercicio 14:
A los empleados con 5 años de servicio le corresponden $400, con 10 años de servicio $800 y con 20 años, $1600.

Ejercicio 15:
Dentro de 13 años.

Ejercicio 16:
Tienen 14 y 42 años.

Ejercicio 17:
La primera cuota es de $162, la segunda cuota $216 y la tercera cuota $324.

Ejercicio 18:
Los lados miden 3 cm y 4 cm, y la diagonal 5 cm.

Ejercicio 19:
La medida del lado del cuadrado era 7 cm.

Ejercicio 20:
Participaron 16 personas.

Ejercicio 21:
El costo es de $150.

Ejercicio 22:

a) $S=\left\{\frac{24}{5}\right\}$

b) $S=\left\{\frac{18}{17}\right\}$

c) $S=R$

d) $S=\left\{-\frac{8}{3}\right\}$

e) $S=\left\{\frac{31}{2}\right\}$

f) $S=\varnothing$

g) $S=\{3\}$

h) $S=\left\{-2\sqrt{5}\right\}$

i) $S=\left\{-\frac{2}{3},1\right\}$

j) $S=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

k) $S=R$

l) $S=\left\{-\frac{5}{8}\right\}$

m) $S=\left\{-2\sqrt{5}\right\}$

n) $S=\left\{-\frac{5}{2}\sqrt{2},\frac{5}{2}\sqrt{2}\right\}$

o) $S=\left\{-\sqrt{3}-1\right\}$

p) $S=\{4\}$

q) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

r) $S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$

s) $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Un enunciado como: *"El número de alumnos de la clase de Análisis no supera los 50 alumnos"*, origina expresiones donde se utilizan los símbolos " > ", " < ", " ≥ ", " ≤ ".

En este caso lo expresamos: $x < 50$

Una inecuación es una propuesta de desigualdad.

Algunas propiedades de las desigualdades, necesarias para resolver las inecuaciones.

Sean a y b $\in$ R , con $a < b$ se verifica:

(a) $a + k < b + k \quad \forall \; k \in R$

(b) $a \,.\, k < b \,.\, k$ si $k > 0$

(c) $a \,.\, k > b \,.\, k$ si $k < 0$

(d) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Las relaciones numéricas que se expresan con los signos " < " y " > " se llaman <u>desigualdades</u> y las relaciones algebraicas correspondientes se llaman <u>inecuaciones</u>

Así: (*) $30 > \frac{5}{2}$; $-\frac{1}{2} < 0$ son <u>desigualdades</u>

(*) Las relaciones: $-3x + 2 < 50$; $4x - \frac{1}{2} \geq 0$ son <u>inecuaciones</u>

Así, por ejemplo, en: $-3x + 2 < 50$

$$-3x + 2 - 2 < 50 - 2$$

$$-3x < 48 \qquad \text{(se multiplica por: } -\tfrac{1}{3}\text{)}$$

$$x > -16$$

En cambio en: $4x - \frac{1}{2} \geq 0$

$$4x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$4x \geq \frac{1}{2} \qquad \text{(se multiplica por: } \tfrac{1}{4}\text{)}$$

$$x \geq \frac{1}{8}$$

Para resolver inecuaciones son válidos los mismos pasos que para resolver ecuaciones, la única diferencia es que, cuando una incógnita está multiplicada por un número negativo se invierte el sentido de la desigualdad.

1.9.5 INTERVALOS

Entre los conjuntos de números que usaremos con más frecuencia se encuentran los intervalos.

Consideremos dos números reales fijos **a** y **b**, con $a \leq b$, definimos los intervalos del siguiente modo:

	Notación de conjunto	Notación de intervalo
INTERVALO ABIERTO	$\{x \in R / a < x < b\}$	(a, b)
INTERVALO CERRADO	$\{x \in R / a \leq x \leq b\}$	[a, b]
INTERVALO SEMI-ABIERTO	$\{x \in R / a < x \leq b\}$ $\{x \in R / a \leq x < b\}$	(a, b] [a, b)
INTERVALOS INFINITOS	$\{x \in R / a < x\}$ $\{x \in R / a \leq x\}$ $\{x \in R / a > x\}$ $\{x \in R / a \geq x\}$ $\{x / x \in R\}$	$(a, +\infty)$ $[a, +\infty)$ $(-\infty, +a)$ $(-\infty, a]$ $(-\infty, +\infty)$

1.9.6 REPRESENTACIÓN GRAFICA DE INECUACIONES

Las soluciones de las inecuaciones, como vimos en los ejemplos, pueden ser de la forma : $x < a$; $x \leq a$; $x > a$; $x \geq a$ que en notación de intervalo se expresan, respectivamente, $(-\infty, a)$; $(-\infty, a]$; $(a, +\infty)$; $[a, +\infty)$ y gráficamente significan:

```
(- ∞ , a)     -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)----------------------->
                                          a
( - ∞ , a]    -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-]---------------------- >
                                          a
(a , + ∞)     ---------------------------(-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >
                                          a
[a , + ∞)     ---------------------------[-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >
                                          a
```

1.9.7 SISTEMAS DE INECUACIONES

Calcular las soluciones comunes a dos o más inecuaciones es resolver el sistema de inecuaciones formado por ellas.

Las soluciones de los sistemas de inecuaciones pueden ser de la forma:

$$a < x < b \;;\; a \leq x < b \;;\; a < x \leq b \;;\; a \leq x \leq b$$

y se indican respectivamente por:

$$(a, b) \;;\; [a, b) \;;\; (a, b] \;;\; [a, b].$$

y representan, como ya definimos, intervalos en la recta real.

(1) Expresá en lenguaje simbólico las siguientes proposiciones:

(a) Si a un número se le restan dos unidades el resultado no es menor que cinco.
(b) Si al triplo de un número se le agregan cuatro unidades su resultado es a lo sumo 10.
(c) Si a un número se le suma su quinta parte el resultado es mayor o igual que su duplo aumentado en 3 unidades.
(d) El triplo de la diferencia de un número y 4 no es menor que -7.

Solución

(a) $x - 2 \geq 5$ (b) $3x + 4 \leq 10$

(c) $x + \frac{1}{5}x \geq 2x + 3$ (d) $3(x - 4) \geq -7$

(2) Resolvé y graficá, en *R*, la solución de las inecuaciones:

(a) $-5x + 2 \geq 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ (b) $3(x - 1) + 4 < -3x + 2$

(c) $2x + 1 < 2(4 + x)$ (d) $-3x - 5 \geq \frac{1}{2}(7 - 6x)$

(e) $\begin{cases} x + 3 < 0 \\ 5 - 2x \geq 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases}$ (h) $(x - 1)(x + 2) \leq 0$

(i) $(x + 3)^2 (x - 1) > 0$ (j) $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$

(k) $\frac{1 + x}{2 - x} \geq 1$

Solución

(a) $-5x + 2 \geq 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$-5x + 2 \geq 2x + 1$
$2 - 1 \geq 2x + 5x$
$1 \geq 7x \quad \text{----------}\to \quad x \leq \frac{1}{7}$

$S = \left(-\infty, \frac{1}{7}\right]$

-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-]---------------------- >
$\frac{1}{7}$

(b) $3(x - 1) + 4 < -3x + 2$

$3x - 3 + 4 < -3x + 2$
$3x + 3x < 2 - 1$
$6x < 1$

$x < \frac{1}{6}$

$S = \left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$

-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)---------------------- >

$\frac{1}{6}$

(c) $2x + 1 < 2(4 + x)$

$2x + 1 < 8 + 2x$

$1 < 8$

S=R La desigualdad se cumple siempre.

-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-●-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >

(d) $-3x - 5 \geq \frac{1}{2}(7 - 6x)$

$-3x - 5 \geq \frac{7}{2} - 3x$

$-5 \geq \frac{7}{2}$

S= ϕ La desigualdad no se cumple nunca.

(e) $\begin{cases} x + 3 < 0 \\ 5 - 2x \geq 1 \end{cases}$

$x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$ -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)----|------------------------>

-3 0

$5 - 2x \geq 1 \Rightarrow x \leq 2$ -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/|-/-/-/-]------------------->

2

$S = (-\infty, -3)$ -/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-)------------------------------ >

-3

(f) $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$

$2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$ --------------------(-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/ >

-1/2

$5 - x \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x$ -/-]---------->

5

$S = \left(-\frac{1}{2}, 5\right]$ --------------------(-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/]---------- >

-1/2 5

(g) $\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases}$

$3x - 6 > 0 \Rightarrow x > 2$ ----------------------|---------(-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/-/- >

0 2

$x + 1 \le 0 \quad \Rightarrow \quad x \le -1$

```
-/-/-/-/-/-/-/-/-]-----|------------------------------>
                 -1    0
```

$S = \phi$

(h) $(x - 1)(x + 2) \le 0$

El signo del producto depende del signo de los factores. Los números 1 y -2 son los puntos donde los factores cambian de signo.

```
                           ---------------------------+++++++++++
signo (x - 1)              _______________|______|_____________
                                          0      1

                             --------+++++++++++++++++++++++
signo (x + 2)                ______|_________|_________________
                                  -2         0

signo (x - 1) (x + 2)        +++++------------------+++++++++++
                             ______|______________|_____________
                                  -2              1
```

La desigualdad se verifica para todo $x \in [-2, 1]$. La solución se expresa:

$S = [-2, 1]$

(i) $(x + 3)^2 (x - 1) > 0$

El factor $(x + 3)^2$ es siempre positivo. Para que el producto dado sea positivo debe verificarse que $(x - 1) > 0$, o sea, $x > 1$. Los puntos del intervalo $(1, +\infty)$ verifican la desigualdad

$S = (1, +\infty)$

(j) $\dfrac{x+2}{1-x} \le 0$

Como en los ejemplos precedentes, el signo de este cociente depende del signo de los factores. Los números - 2 y 1 son los puntos donde los factores cambian de signo. Además, debemos tener en cuenta que $x \neq 1$ porque este valor anula el denominador.

```
                     ------------------++++++++++++++++
Signo (x+2)          _______________|______|_____________
                                   -2      0

Signo (1-x)          ++++++++++++++++------------------
                     _______________|______|_____________
                                    0      1

Signo ((x+2)/(1-x))  ------------------+++++------------------
                     _______________|______|_____________
                                   -2      1
```

La desigualdad se verifica para todo $x \in (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$. La solución se expresa: $S = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

(k) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$

Un método para resolver el problema consiste en transformar la expresión en un cociente para analizar su signo como en el ejemplo anterior.

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-x}{3x} < 0$$

sig (3 - x)

```
+++++++++++++++-----------------------
________________|_______________
                3
```

sig (3 x)

```
----------++++++++++++++++++++++
________|________________________
        0
```

sig $\left(\dfrac{3-x}{3x}\right)$

```
----------+++++++++----------------------
________|__________|______________
        0          3
```

S = (- ∞ , 0) ∪ (3, + ∞)

(k) $\dfrac{1+x}{2-x} \geq 1$

$$\frac{1+x}{2-x} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{2-x} \geq 0$$

sig (2x - 1)

```
------------------------------++++++++++
__________________|______|____________
                  0      ½
```

sig (2 - x)

```
++++++++++++++++++++++++++-----
___________________|_____________|_____
                   0             2
```

sig $\left(\dfrac{2x-1}{2-x}\right)$

```
-------------------------------++++++++-----
___________________|______|_________|_____
                   0      ½         2
```

S = $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right)$

ACTIVIDADES

1) ¿Existen números reales que verifiquen que: $x \geq 3$ y $x < 7$? ¿y en el caso de que $x \leq -2$ y $x > 5$? ¿ y en el caso $x \geq 2$ y $x \leq 2$?

2) Dados los siguientes subconjuntos de números reales, expresalos mediante inecuaciones, representalos en la recta numérica y escribilos en forma de intervalos:

- **a)** Los valores de x mayores que 2 y menores que 6.
- **b)** Los valores de x mayores o iguales que -1.
- **c)** Los valores de x menores que 2/3.
- **d)** Los valores de x que superan al menor número entero positivo.
- **e)** Los valores de x menores que el mayor número par negativo.
- **f)** Los valores de x comprendidos entre los dos múltiplos positivos de 3 de un solo dígito.

3) El lado de un hexágono regular es menor que 3 cm, ¿qué podés decir de su perímetro y de su área?

4) Expresá en lenguaje simbólico:

- **a)** El doble de un número disminuido en cinco unidades es por lo menos 12.
- **b)** El triple de un número aumentado en 8 unidades es menor que 20.
- **c)** El doble de la suma de un número y 5 no es mayor que 4.
- **d)** Si a un número se le agrega la tercera parte, la suma es menor o igual que su triple.

5) Me alcanzan \$978 para comprar 6 revistas técnicas, pero no me alcanzan \$1898 para comprar 13. ¿Entre qué valores oscila el precio de una revista?

6) Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre el peso de la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en la furgoneta?

7) Se quiere alquilar un auto para un viaje y las opciones que se presentan son: un costo fijo de \$100 a lo que se agrega \$20 por kilómetro recorrido o un costo inicial de \$400 más \$17 por kilómetro recorrido. ¿Cuánto habrá que recorrer para que la primera opción sea la más conveniente?

8) En las instrucciones de la caja de un determinado artículo, indica que debe conservarse a una temperatura entre 5°C y 30°C. Sabiendo que los grados Celsius (C) son equivalentes a los cinco novenos de la diferencia entre los grados Fahrenheit (F) y 32, ¿entre qué temperatura en grados Fahrenheit se debe conservar el artículo?

9) Se estima que el costo anual de manejar un cierto automóvil nuevo se obtiene multiplicando los kilómetros recorridos por diez y sumarle un monto fijo de \$39600. Si una persona que compra este auto puede gastar el próximo año en su uso entre \$115000 y \$130000, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer?

10) Una persona tiene veinte años menos que otra. Si las edades de ambas suman a lo sumo 86 años, ¿cuál es la edad máxima que podría tener la primera persona?

11) En un examen de 40 preguntas se otorgan dos puntos por cada acierto y se restan 0,5 por cada respuesta incorrecta. ¿Cuántas preguntas hay que contestar bien para obtener un mínimo de 60 puntos?

12) El producto de un número entero por otro, dos unidades mayor, no es mayor que 8. ¿Cuál puede ser ese número?

13) Un grupo de amigos decide ir a un recital. El costo de contratar el colectivo para que los lleve es de \$8100 y se debe repartir en partes iguales entre todos los que viajen. Los promotores del recital ofrecen descuentos a los grupos que lleguen en colectivo. Las entradas cuestan normalmente \$900 cada una, pero se realiza un descuento de \$1,8 por cada persona que vaya en el grupo (hasta la capacidad máxima del colectivo).
¿Cuántos amigos deben ir en el grupo para que cada uno pague menos de \$972?

14) Resolvé las siguientes inecuaciones, representá el conjunto solución en la recta y escribilo en forma de intervalo:

a) $3.\left(x-4\right) \geq 18x+5$

b) $\frac{1}{2}x - 5 \geq x + \frac{3}{4}$

c) $2-4.\left(x+3\right) < 5.\left(x+1\right)+3$

d) $3x - 12 \geq \frac{5x-6}{4}$

e) $\frac{5x+1}{6} > 2 - \frac{2x+1}{3}$

f) $\frac{\sqrt{5}x - 2 + \sqrt{3}}{3} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$

g) $1,\overset{\frown}{3} \cdot \left(\frac{6x-3}{4}\right) - \frac{x-1}{6} < 1$

h) $\frac{\sqrt{48} - 5x}{2} + 2\sqrt{3} \leq 0$

i) $\begin{cases} 4x - 1 < 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 4 - 2x \geq 1 \\ 3x + 5 < 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 4x + 5 < 7x - 2 \\ x - 1 < 3x - 6 \end{cases}$

l) $\left(2x-3\right).\left(x+4\right) > 0$

m) $\left(3-x\right).\left(2x+1\right) < 0$

n) $x^2 - 2x \leq 0$

o) $\frac{x - \frac{1}{2}}{x+1} < 0$

p) $\frac{x}{x+1} > 3$

q) $\frac{3}{x} \leq 1$

r) $\frac{x+1}{1-x} \geq 1$

s) $\frac{5x-4}{x+3} - 2 < \frac{2x}{x+3}$

t) $\frac{x}{-4-x} > \frac{2}{4+x}$

ACTIVIDADES INECUACIONES:

Ejercicio 1:
Números reales que verifican $x \geq 3$ y $x < 7$: $[3;7)$.
No hay números reales que verifican $x \leq -2$ y $x > 5$.
Números reales que verifican $x \geq 2$ y $x \leq 2$: $[2;2]$ o $x = 2$.

Ejercicio 2:
- **a)** $2 < x < 6$
- **b)** $x \geq -1$
- **c)** $x < \frac{2}{3}$
- **d)** $x > 1$
- **e)** $x < -2$
- **f)** $6 < x < 9$

Ejercicio 3:
- **a)** Perímetro es menor que 18 cm.
- **b)** Área es menor que $\frac{27}{2}\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

Ejercicio 4:
a. $2x - 5 \geq 12$
b. $3x + 8 < 20$
c. $2(x + 5) \leq 4$
d. $x + \frac{x}{3} \leq 3x$

Ejercicio 5:
El precio de una revista es mayor que \$146, y menor o igual que \$163.

Ejercicio 6:
Cada cajón debe pesar como máximo 115 kg.

Ejercicio 8:
Entre 41°F y 86° F.

Ejercicio 9:
Deberá recorrer entre 7540 km y 9040 km.

Ejercicio 10:
A lo sumo deberá tener 33 años.

Ejercicio 11:
Se deben contestar correctamente como mínimo 27 preguntas.

Ejercicio 12:
Cualquier número entero entre – 4 y 2, incluidos.

Ejercicio 13:
Deben asistir más de 50 amigos.

Ejercicio 14:

a) $S = \left(-\infty, -\frac{17}{12}\right]$

b) $S = \left(-\infty, -\frac{23}{2}\right]$

c) $S = (-2, +\infty)$

d) $S = [6, +\infty)$

e) $S = (1, +\infty)$

f) $S = \left[\sqrt{5}, +\infty\right)$

g) $S = (-\infty, 1)$

h) $S = \left[\frac{8\sqrt{3}}{5}, +\infty\right)$

i) $S = \left[-5, \frac{1}{4}\right)$

j) $S = \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$

k) $S = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

l) $S = (-\infty, -4) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

m) $S = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$

n) $S = [0, 2]$

o) $S = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

p) $S = \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

q) $S = (-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

El valor absoluto de un número real <u>a</u> se define como el número <u>no negativo</u>, que notamos $|a|$. determinado por:.

$$|a| = \begin{cases} a \;\; si \;\; a > 0 \\ 0 \;\; si \;\; a = 0 \\ -a \;\; si \;\; a < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto es siempre un valor positivo.

☞ $|2| = 2$; $|-3| = 3$; $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$; $|0| = 0$

Enunciamos algunas propiedades :

Propiedad	Ejemplos
1 - $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$	$|-3 \cdot 7| = |-3| \cdot |7| = 21$
2 - $|a + b| \leq |a| + |b|$	$|-8+3| \leq |-8| + |3| \Rightarrow > 5 \leq 11$
3 - $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$	$\left|\frac{8}{-2}\right| = \frac{|8|}{|-2|} = \frac{8}{2} = 4$
4 - $|a - b| = |b - a|$	$|3-5| = |5-3|$
5 - $\sqrt{a^2} = |a|$	

Podemos asociar el valor absoluto de un número con el concepto geométrico de distancia.

Sean x e y números reales, se llama <u>distancia</u> entre x e y al número real | x-y |. Simbolizamos $d(x, y) = |x - y|$

Propiedades:

Para todo x , y , z ∈ R se verifica:

(a) $d(x, y) \geq 0$;

(b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(c) $d(x, y) = d(y, x) \Leftrightarrow |x - y| = |y - x|$

(d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \Leftrightarrow |x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

Expresá simbólicamente los siguientes enunciados:

(1) x está a más de 3 unidades de 7
$d(x, 7) = |x - 7| > 3$

(2) x no está a más de 5 unidades de 8
$d(x, 8) = |x - 8| < 5$

(3) x está a 4 unidades de –3
$d(x, -3) = |x + 3| = 4$

Relacioná cada conjunto de la columna de la izquierda con su expresión correspondiente de la columna de la derecha.

(1) El conjunto de los números reales cuya distancia a –3 es menor que 1.	(a) $\lvert x \rvert \geq 3/2$
(2) El conjunto de los números reales cuyo cuadrado es mayor que 4.	(b) $\lvert x - 7 \rvert < 5$
(3) El conjunto de los números reales cuya distancia a –4 es igual a su distancia a 3.	(c) $\lvert x \rvert > 2$
(4) El conjunto de los números reales cuya distancia al origen es mayor o igual a 3/2.	(d) $\lvert x + 3 \rvert < 1$
(5) El conjunto de los números reales cuya distancia a 7 es menor que 5.	(e) $\lvert x + 4 \rvert = \lvert x - 3 \rvert$

1.10.1 ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Son relaciones algebraicas de uso frecuente, esencialmente en el análisis de funciones.

Analizaremos algunos ejemplos.

1 - Calculá, si existen, el o los valores de x que verifican las siguientes ecuaciones:

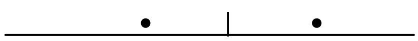
a) $|x - 3| = 0$

$$|x - 3| = 0 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

b) $|2x - 6| = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

c) $|x - 1| = \frac{1}{3}$

$$|x - 1| = d(x, 1) = \frac{1}{3}$$



$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\quad 1 \quad$ $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

<u>Solución:</u> $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right\}$

d) $\left|5x-2\right| = \dfrac{1}{2}$

<u>Solución:</u> $\left|5x-2\right| = \left|5\cdot\left(x-\dfrac{2}{5}\right)\right| = \left|5\right|\cdot\left|x-\dfrac{2}{5}\right| = 5\left|x-\dfrac{2}{5}\right|$

Por lo tanto: $\left|5x-3\right| = \dfrac{1}{2}$

$$5\left|x-\frac{2}{5}\right| = \frac{1}{2} \rightarrow \left|x-\frac{2}{5}\right| = \frac{1}{10}$$

$$d\left(x,\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{10} \qquad \frac{2}{5} \qquad \frac{5}{10}$$

<u>Solución:</u> $\left\{\dfrac{3}{10}, \dfrac{1}{2}\right\}$

e) $\left|4x+2\right| = 3$

<u>Solución</u> $\left|4x+2\right| = \left|4\left(x+\dfrac{2}{4}\right)\right| = \left|4\right|\cdot\left|x+\dfrac{1}{2}\right| = 4\left|x+\dfrac{1}{2}\right| = 3$

luego $\left|x+\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{3}{4}$ o sea $d\left(x,-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$

$$\left\{-\frac{5}{4},\frac{1}{4}\right\}$$

$$-\frac{5}{4} \qquad -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4}$$

2- Calculá, si existe, la solución de las inecuaciones :

a) $\left|x\right| < 2$

$\left|x\right| = \left|x-0\right| = d\left(x,0\right) < 2$

--------(-/-/-/-/-/-|-/-/-/-/-/-)--------

-2 0 2

<u>Solución:</u> (-2 , 2)

b) $\left|x-3\right| < 2$

$\left|x-3\right| = d\left(x,3\right) < 2$

--------(-/-/-/-/-/-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/-)-------

1 3 5

<u>Solución:</u> (1 , 5)

c) $|2x-3| \leq \frac{1}{2}$

$$|2x-3| = \left|2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right| = 2\left|x-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

luego $\left|x-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{4}$ o sea $d\left(x\,,\frac{3}{2}\right) \leq \frac{1}{4}$

<u>Solución</u>: $\left[\frac{5}{4}\,,\frac{7}{4}\right]$

-------[-/-/-/-/-/-/-/-/-|-/-/-/-/-/-/-/-/-]----------

$\frac{5}{4}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{4}$

d) $|-2x+3| > 2$

$$|-2\,x+3| = \left|-2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right| = |-2|\cdot\left|x-\frac{3}{2}\right| = 2\left|x-\frac{3}{2}\right| > 2$$

luego $\left|x-\frac{3}{2}\right| > 1$

o sea $d\left(x\,,\frac{3}{2}\right) > 1$

-/-/-/-/-/-/-)---------|---------(-/-/-/-/-/-/-

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$

<u>Solución</u>: $\left(-\infty\,,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}\,,+\infty\right)$

ACTIVIDADES

1) Calculá, si existen, los valores de **x** que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a. $\left|\frac{3}{2}x\right| = 0$

b. $\left|-3x\right| = 6$

c. $|x-4| = 4$

d. $|x| = -5$

e. $|2x+1| = \frac{1}{3}$

f. $\left|-3x+2\right| = 4$

2) Resolvé las siguientes inecuaciones y escribí su solución en forma de intervalos.

a. $|x| < 2$

b. $|x-2| < \frac{1}{2}$

c. $|3x+4| \leq 5$

d. $|2x+1| > \frac{1}{4}$

e. $|-3x+2| \geq 1$

f. $|5x-1| > 4$

3) Utilizando el símbolo de valor absoluto; expresá cada una de las siguientes expresiones.

- x está a mas de 5 unidades de 8
- x está exactamente a 2 unidades de 10
- La distancia entre –3 y x es 2.
- x difiere de –2 en menos de $\frac{2}{3}$.

ACTIVIDADES VALOR ABSOLUTO:

Ejercicio 1:

a) $S = \{0\}$

b) $S = \{-2, 2\}$

c) $S = \{0, 8\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \left\{-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$

f) $S = \left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$

Ejercicio 2:

a) $S = (-2, 2)$

b) $S = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

c) $S = \left[-3, \frac{1}{3}\right]$

d) $S = \left(-\infty, -\frac{5}{8}\right) \cup \left(-\frac{3}{8}, +\infty\right)$

e) $S = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$

f) $S = \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \cup (1, +\infty)$

Ejercicio 3:

- $|x - 8| > 5$
- $|x - 10| = 2$
- $|-3 - x| = |x + 3| = 2$

UN POCO DE HISTORIA

Leonhrad Euler. (15 de Abril 1707 -18 de Septiembre 1783) Nació en Basilea, Suiza. Fue hijo de un clérigo, que vivía en los alrededores de Basilea. Su talento natural para las matemáticas se evidenció pronto por el afán y la facilidad con que dominaba los elementos, bajo la tutela de su padre.

A una edad temprana fue enviado a la Universidad de Basilea. Alentado por su maestro, Jean Bernoulli, maduró rápidamente, y a los 17 años de edad, cuando se graduó Doctor, provocó grandes aplausos con un discurso probatorio, el tema del cual era una comparación entre los sistemas cartesiano y newtoniano.

A la edad de diecinueve años, envió dos disertaciones a la Academia de París, una sobre arboladura de barcos, y la otra sobre la filosofía del sonido. Estos ensayos marcan el comienzo de su espléndida carrera.

Por esta época decidió dejar su país nativo, a consecuencia de una aguda decepción, al no lograr un profesorado vacante en Basilea. Así, Euler partió en 1727, año de la muerte de Newton, a San Petersburgo,

En 1733 sucedió a su amigo Daniel Bernoulli, que deseaba retirarse, y el mismo año se casó con Mademoiselle Gsell, una dama suiza, hija de un pintor que había sido llevado a Rusia por Pedro el Grande.

Euler dio una muestra insigne de su talento, cuando efectuó en tres días la resolución de un problema que la Academia necesitaba urgentemente, pese a que se le juzgaba insoluble en menos de varios meses de labor. Pero el esfuerzo realizado tuvo por consecuencia la pérdida de la vista de un ojo. Pese a esta calamidad, prosperó en sus estudios y descubrimientos; parecía que cada paso no hacía más que darle fuerzas para esfuerzos futuros. Hacia los treinta años de edad, fue honrado por la Academia de París, como uno de sus miembros.

En 1741, el rey Federico el Grande invitó a Euler a residir en Berlín.
En 1766 Euler fue a San Petersburgo, para pasar allí el resto de sus días a los setenta y seis años de edad.

Sobre el origen del concepto de función existen distintas opiniones, mientras algunos autores admiten cierto carácter funcional en ciertas operaciones matemáticas de la antigüedad (en trabajos de los babilonios, de Ptolomeo o de los árabes), otros sitúan su nacimiento con la aparición de la geometría analítica (Descartes) y algunos ubican su auténtica aparición en pleno siglo XIX con las definiciones de funciones dadas por Dirichlet y por Lobatchevsky.

Pero si tuviéramos que fijar un período para el nacimiento del concepto de función, éste lo podemos ubicar en el siglo XVII, ya que influidos por los descubrimientos de Kepler y Galileo en relación con los cuerpos celestes, el estudio del movimiento fue el problema que más interesó a los científicos de ese siglo.

De estos estudios se obtuvo un concepto fundamental, que fue central en casi todo el trabajo de los dos siglos siguientes: el concepto de *función o dependencia de una cantidad respecto de otra(s).*

Entre los matemáticos que más contribuyeron al nacimiento y a los primeros planteamientos de este concepto se destacan :

- Newton (1642 – 1727) utilizó el término **fluyente** para cualquier relación entre variables.

- Leibnitz (1646- 1716) utilizó por primera vez la palabra **función** para indicar cantidades que dependían de una variable. También introdujo las palabras **constante, variable y parámetro.**

En el siglo XVIII encontramos al gran matemático Euler (1707—1783) quien, en una de sus aplicaciones, hace un detallado estudio del concepto y de otros términos relacionados con éste. Al definir las nociones iniciales se refiere a los términos **constante**, cantidad definida que toma siempre el mismo valor, y **variable,** cantidad indeterminada o universal, que comprende en sí misma todos los valores determinados. Utilizó por primera vez la notación f(x), que perdura en la actualidad.

En el siglo XIX entre los aportes más importantes se encuentran los de Fourier con el estudio de las series trigonométricas y los de Dirichlet, quien fue el primero en utilizar sistemáticamente la función numérica como lo hacemos hoy : **a cada número "x" de un conjunto de números se le asocia otro número y = f(x).**

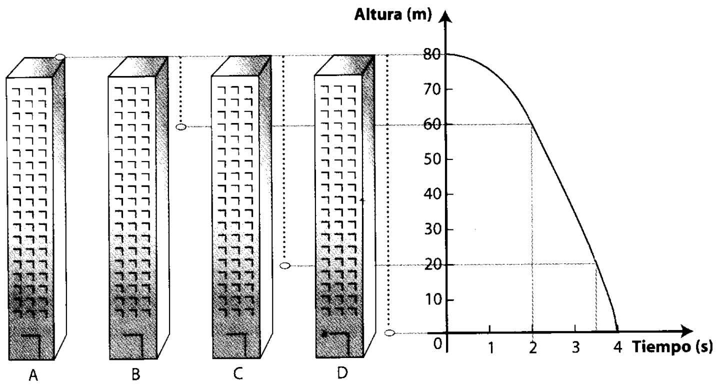
La introducción de la teoría de conjuntos permitió una generalización del concepto de función. Hasta ese momento, una función estaba definida siempre en cada punto del continuo de todos los valores reales o complejos o en cada punto de un intervalo dado. Pero al considerar una definición en términos conjuntistas, todas las definiciones corresponden a casos particulares de esta nueva generalización.

LA FUNCIÓN COMO MODELO

Como ocurrió a lo largo del tiempo, al estudiar diversos fenómenos sociales o de la naturaleza, surge con frecuencia la necesidad de considerar situaciones en que varias magnitudes variables están relacionadas entre sí, en el sentido de que los valores que toman algunas de ellas dependen de los valores de las demás.

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

1) Se deja caer una piedra desde el techo de un edificio de 80 m de altura y se desea describir cómo varía la altura de la piedra en relación con el tiempo, es decir, su posición desde que comienza a caer hasta que toca el piso.



- En cada instante "t" la piedra se encuentra a una altura "h", luego la **altura depende del tiempo.**

- La fórmula que describe esta situación es

$$\boxed{h = h_o + v_o\, t - \tfrac{1}{2} g\, t^2 \qquad (1)}$$

Donde:

h_o representa la altura desde donde se lanza el cuerpo y

v_o la velocidad inicial,

g es constante y representa la aceleración de la gravedad en el lugar:

$$g = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cong 10 \text{ m/s}^2,$$

con los datos podemos escribir la fórmula (1) como:

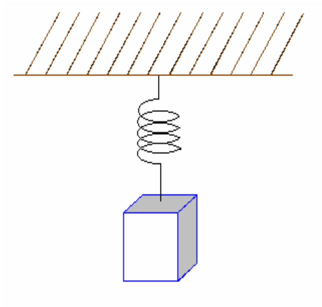
$$\boxed{h(t) = 80 - 5\, t^2}$$

- Calculamos algunos valores y observamos la correspondencia con los datos del gráfico.

Tiempo (seg)	Altura (metros)
0	80
2	60
4	0

- Luego podemos concluir que la **posición** de la piedra se **relaciona** con el **tiempo "t" de caída.**

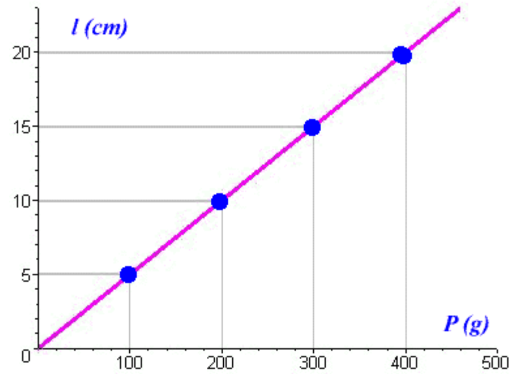
2) Si colgamos un resorte por un extremo y aplicamos un peso en el otro, se produce un alargamiento como se indica en la tabla.



Peso (g)	Alargamiento(cm)
100	5
200	10
300	15
400	20

- Representá los datos:

- Establecé, si existe, la relación entre peso (p) y alargamiento (l)



$$\frac{l_1}{p_1} = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

$$\frac{l_2}{p_2} = \frac{10}{200} = 0{,}05$$

$$\frac{l_3}{p_{31}} = \frac{15}{300} = 0{,}05$$

$$\frac{l_4}{p_4} = \frac{20}{400} = 0{,}05$$

¿?

¿Es posible generalizar el resultado $l = k\,p$?

¿Se puede inferir de qué depende el valor de la constante k?

De las relaciones $l\,/\,p = 0.05$ concluimos que

$$\boxed{l = 0.05\,p}$$

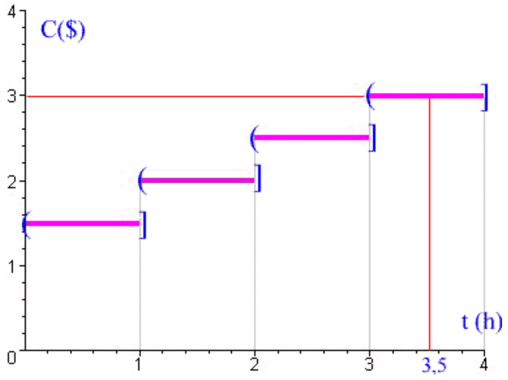
Luego el alargamiento está en **correspondencia** con el peso aplicado.

3) En una playa de estacionamiento figura la siguiente tarifa de precios:

1 hora o fracción	$ 1,50
Cada hora más o fracción	$ 0.50
Máximo 24 horas	$ 25

- Representá la gráfica de la relación costo – tiempo.

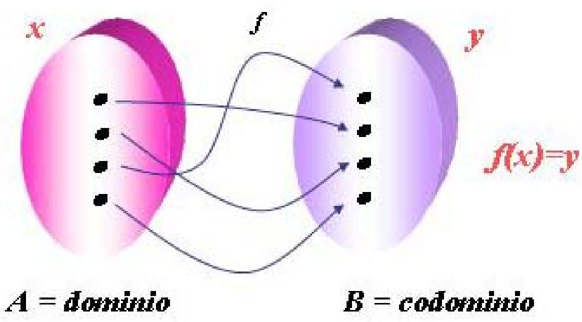
- Calculá el costo de estacionamiento por tres horas y media.



De la gráfica se infiere que el costo por estacionar 3,5 horas es de $ 3

De las consideraciones anteriores, podemos inferir que una función queda determinada por:

- Un conjunto llamado **dominio.**
- Un conjunto llamado **codominio.**
- Una **ley** que asocia a **cada elemento del dominio un único elemento del codominio.**



- En los ejemplos anteriores se han relacionado dos magnitudes: altura– tiempo; peso- alargamiento ; costo- tiempo.

- Estas se han representado sobre los ejes de coordenadas o ejes cartesianos ortogonales. Al eje horizontal se lo llama: **eje de las abscisas o eje de las x** ; al eje vertical: **eje de las ordenadas o eje de las y.** Al punto de intersección de los ejes se lo llama **origen de coordenadas.**

- Cada punto representado en ese sistema de ejes da información ordenada de la magnitud representada

- En las relaciones representadas a cada valor del eje horizontal le corresponde un **único** valor del eje vertical, entonces estas relaciones son **funciones.**

2.1.0 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Dados dos conjuntos A y B una función f de A en B es una correspondencia que a cada elemento de A asocia un único elemento de B.

Con la notación,

$$f : A \rightarrow B \quad / \quad y = f(x)$$

(que se lee: *f de A en B tal que y es igual a f de x*), indicamos que la función f relaciona los elementos del conjunto *A*(*dominio*) con los elementos del conjunto *B* *(codominio)* según la fórmula *y = f(x).*

Esta definición incluye conjuntos de elementos cualesquiera, numéricos y no numéricos.

En el curso consideraremos, en general, funciones con **dominio** igual al conjunto de los **números reales o subconjuntos de R** y con **codominio igual a R.**

2.1.1 DOMINIO

Dominio de f: es el conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente "x" y se simboliza: D_f .

☞ En el problema 1.- el dominio de la función es $D_f = [0,4]$.

2.1.2 CODOMINIO

Codominio de f: es el conjunto que contiene a todos los valores que puede tomar una función.

2.1.3 IMAGEN

Imagen de f: cada elemento "y" ∈ B que está asociado a un elemento "x" del dominio de f se llama imagen de x y se escribe "f(x)".

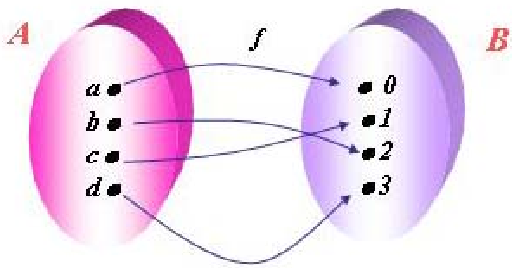
Se simboliza: $Im_f = \{ y \in B / \exists \ x \in A / f(x) = y\}$

☞ En el problema 1.- la imagen de la función *es* $Im_f = [0,80]$.

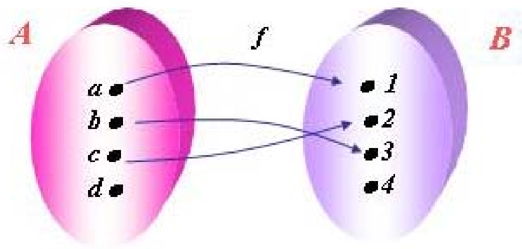
ACTIVIDADES

1) Analizá los siguientes diagramas (diagramas de Venn) e indicá cuáles de ellos corresponden a funciones de A en B. Justificá tu respuesta.

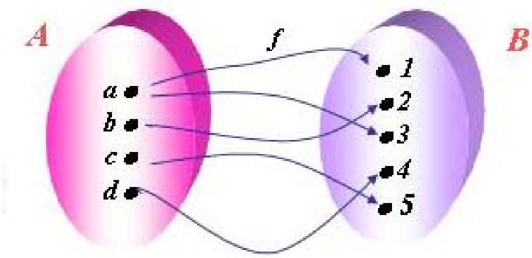
a.



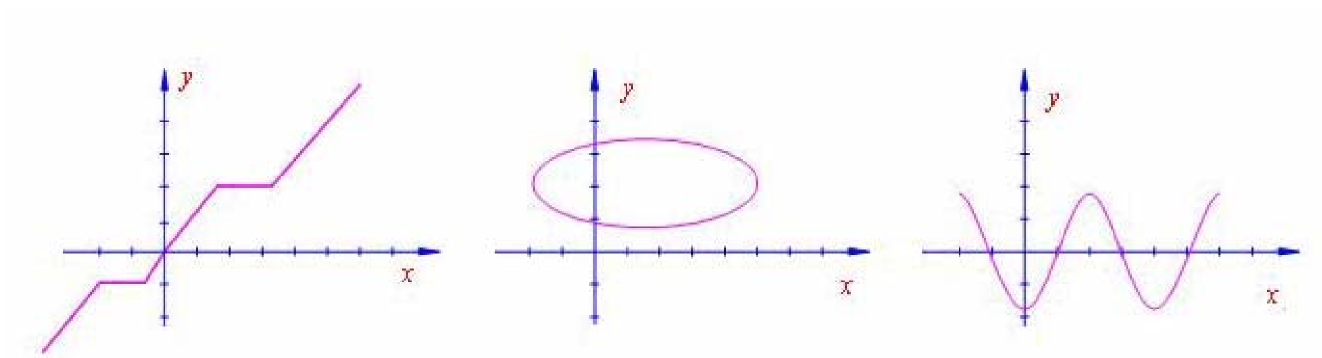
b.



c.



2) Analizá los siguientes gráficos e indicá cuáles corresponden a funciones. Justificá tus respuestas.



2.2.0 DIFERENTES FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

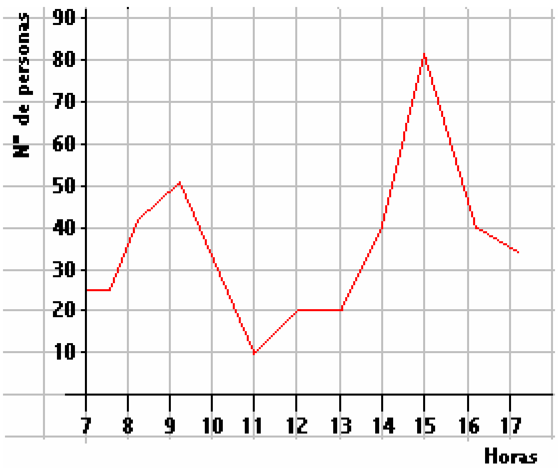
La relación entre las variables independiente y dependiente puede establecerse mediante: gráficas, tablas numéricas, textos, expresión algebraica,…

2.2.1 MEDIANTE GRÁFICAS

Para que la información obtenida de la gráfica sea precisa, es necesario tener en cuenta:

- La escala utilizada en cada eje.
- La información numérica o verbal que aparece en los ejes.

☞ La gráfica representa la actividad en un andén de una estación de trenes desde las 7 horas a las 17 horas. Respondé las siguientes preguntas:



¿Cuántas personas están a las 7 h?.
¿Cuántas personas están a las 9 h?.
¿Cuántas personas están a las 15 h?.
¿A que hora la actividad es mayor?.
¿A que hora la actividad es la mínima?

2.2.2 MEDIANTE UN TEXTO

A partir de la lectura de un texto, en el que se relacionan dos magnitudes, podemos obtener una gráfica que permita visualizar la información

✍

"Matías salió de su casa una mañana y bajó las escaleras en dos minutos. Al llegar a la calle tuvo que detenerse, pues se encontró con el semáforo en rojo. Poco después cruzó la calle en dirección al parque; allí comenzó a caminar cada vez más deprisa, hasta correr; cansado, al poco tiempo disminuyó la marcha y luego se sentó en un banco. Después del descanso, de regreso a su casa, la única parada la hizo para comprar el diario y conversar con el quiosquero."

Describí mediante una gráfica aproximada, que relacione tiempo – velocidad, la situación anterior.

2.2.3 MEDIANTE UNA TABLA DE DATOS

- Los datos se representan gráficamente eligiendo la escala adecuada.
- Si es posible, se intenta dibujar una curva que los aproxime.
- A partir de la curva se pueden calcular datos que no figuran en la tabla.

☞ La siguiente tabla muestra la estatura de un niño desde 0 a 5 años.

Edad (años)	0	1	2	3	4	5
Estatura (cm)	49	63	75	84	96	109

a) Representá gráficamente los datos.
b) ¿El crecimiento por año es uniforme?
c) ¿Hay alguna relación entre la estatura y la edad?
d) Realizá la gráfica con la misma escala en los dos ejes y comparala con la que se obtiene utilizando escalas distintas en cada eje.
e) ¿Cuál da la información más clara?

2.2.4 MEDIANTE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Hay una gran cantidad de funciones que pueden expresarse mediante una fórmula o expresión algebraica, que relaciona de forma exacta y sintética las variables.

Así en los primeros ejemplos expresamos:

1) $h = 80 - 5\,t^2$ entonces $h = f(t)$

2) $l = 0.05\,p$ entonces $l = f(p)$

Ventajas de la expresión algebraica

- Comodidad de expresión.
- Precisión en los cálculos.
- Posibilidad de recurrir a modelos conocidos y estudiados.
- Aplicación de métodos específicos para analizar las funciones y extraer gran cantidad de información.

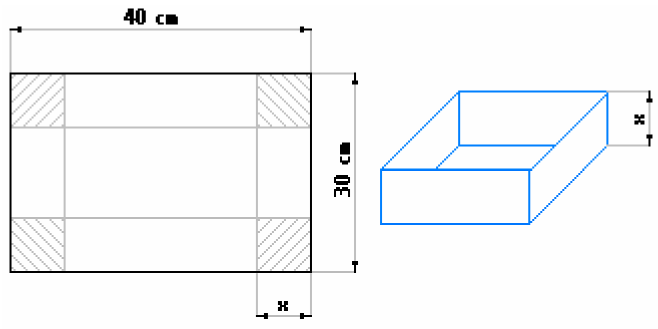
1) Con un cartón de *40 cm* por *30 cm* se desea fabricar una caja, sin tapa, recortando cuadrados de igual lado, en las esquinas.

- Calculá el volumen de la caja en función del lado del cuadrado.
- ¿Cuál es el dominio de la función?.

SOLUCIÓN:

- Dibujamos un diagrama y asignamos una notación adecuada.
- Relacionamos las variables.

V = Superficie base x altura



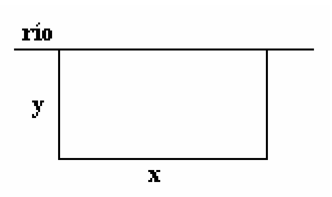
Luego si $\begin{cases} Sup\ base = (40 - 2\,x)\,(30 - 2\,x) \\ altura = x \end{cases}$

Entonces $\boxed{V = (40 - 2\,x)\,(30 - 2x)\,x}$

Los valores de "x" están comprendidos entre 0 y 15. ¿ Por qué?.

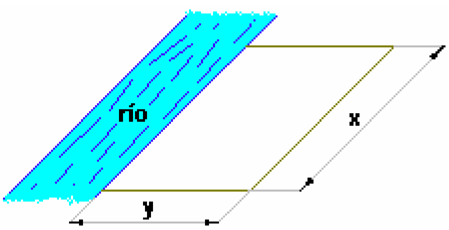
Luego $D_f = (0,15) = \{x \in R \,/\, 0 < x < 15\}$

2) Un lado de un terreno rectangular tiene como límite natural un río, y se utilizan *200 m* de alambre para cercar los otros tres lados. Si "*x*" es la longitud del lado del terreno paralelo al río:



- Expresá el área del terreno como función de "*x*".
- Indicá el dominio de la función resultante.

SOLUCIÓN:



Dibujamos un diagrama y asignamos una notación adecuada:

x: lado paralelo al río.
y: lados no paralelos al río.

Relacionamos las variables.
Sabemos que se utilizan *200 m* de alambre para cercar el terreno, entonces

$$200 = x + 2\,y \qquad (1)$$

Tenemos que expresar el área del terreno:

$$\boldsymbol{A = x\ y} \qquad (2)$$

como función de "*x*"

- Despejamos "*y*" de (1)

$$200 - x = 2\,y \quad \Rightarrow \quad \frac{200 - x}{2} = y \qquad \text{ó} \qquad y = 100 - \frac{x}{2}$$

- Sustituímos en (2) y obtenemos

$$\boxed{A = x\left(100 - \frac{x}{2}\right)}$$

Luego el área del terreno como función de "*x*" es:

$$\boxed{A(x) = 100\,x - x^{2}}$$

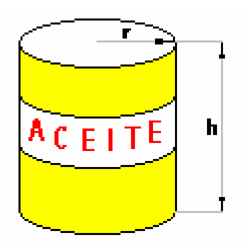
Como el área es positiva, el dominio de la función está dado por:

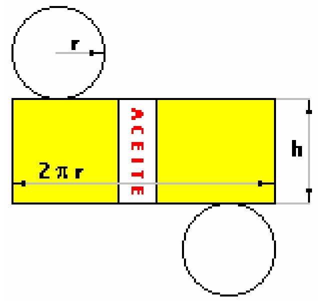
$$D_f = \{\ x \in R \ /\ 0 < x < 200\ \}$$

3) Una lata contiene un litro de aceite. El material de la base y la tapa cuestan $3{,}5\ \$ / cm^2$ y el lateral cuesta $2{,}8\ \$ / cm^2$. Expresá el costo de fabricación de la lata en función del radio de la base.

SOLUCIÓN:

Dibujamos un diagrama





- Asignamos nombre a las variables: *r*: radio; *h*: altura; *C*: costo

- Relacionamos las variables.

  El costo total dependerá de las superficies

  Sup. base = $\pi\, r^2$

  Sup. Lateral = $2\ \pi\, r\, h$

  y se puede expresar: C total $= C\ base\ .\ 2\ Sup.\ Base + C\ lat.\ S\ lateral$;
  sustituyendo los valores se tiene:

$$\boxed{C = 3{,}5\,(2\ \pi\ r^2) + 2{,}8\,(2\ \pi\, r\, h) \qquad (1)}$$

El volumen de la lata es $V = \pi r^2 h$

Como el volumen *es* $1\ litro = 1\ dm^3 = 1000\ cm^3$ entonces $1000 = \pi\ r^2\ h$

- Despejamos el valor de *h* $\Rightarrow$ $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$

- Sustituímos en (1); entonces se tiene:

$$C = 3{,}5\ (2\ \pi\ r^2) + 2{,}8\ (2\ \pi\ r\ \frac{1000}{\pi r^2})$$

Entonces la fórmula:

$$\boxed{C\,(r) = 7\ \pi\ r^2 + \frac{5600}{r}}$$

representa el costo de fabricación en función del radio.

2.3.0 GRÁFICOS DE FUNCIONES

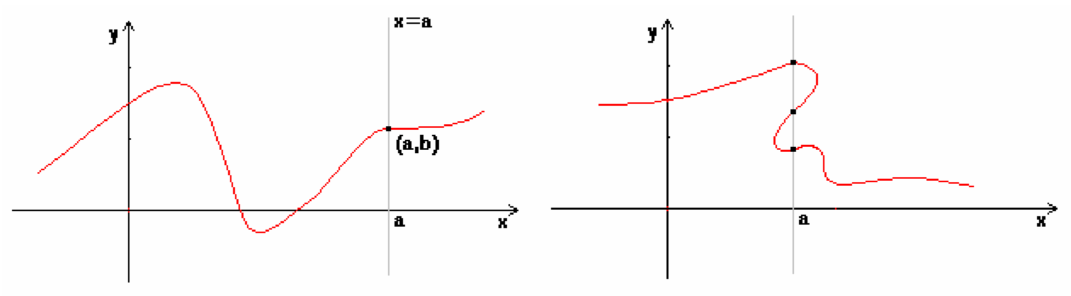
Nos interesa especialmente un grupo de funciones: aquellas cuyo dominio e imagen coinciden o están contenidos en el conjunto de los números reales, y reciben el nombre de **funciones reales de variable real.**

Si f es una función con dominio en A entonces la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados $(x, y) = (x, f(x))$ con $x \in A$

DEFINICIÓN: Sea $D_f \subset R$, se llama **gráfica de f** al conjunto de puntos (x, y) del plano *donde* $x \in D_f$ e $y = f(x)$. Indicamos:

$$G(f) = \{ (x, f(x)) \ / \ x \in D_f \}$$

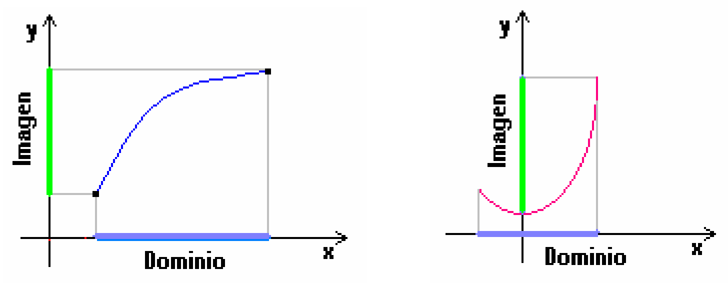
- La gráfica de una función siempre puede representarse de izquierda a derecha, nunca regresa hacia atrás, porque eso significaría que para un valor de la variable independiente existen varios valores de la variable dependiente, como se observa en las figuras



Prueba de la recta vertical

Una curva en el plano es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical interseca a la curva más de una vez

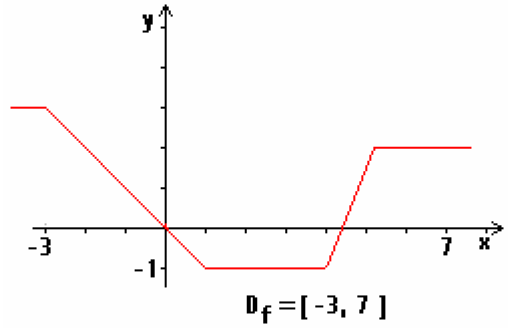
- La gráfica también nos permite representar el dominio e imagen de f sobre los ejes coordenados, como se muestra en la figura



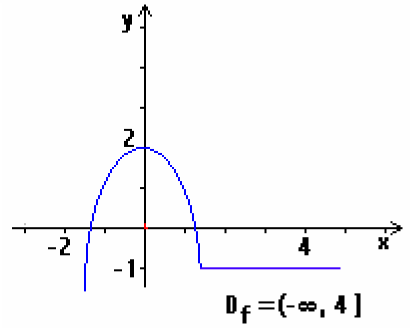
ACTIVIDAD

En cada uno de los siguientes gráficos de funciones, calculá la imagen de la función atendiendo al dominio indicado.

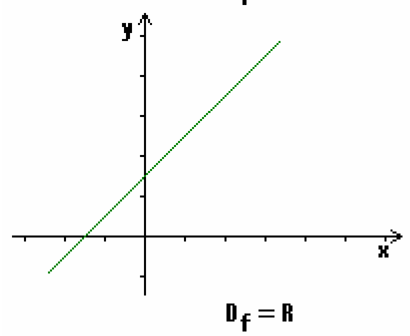
a.



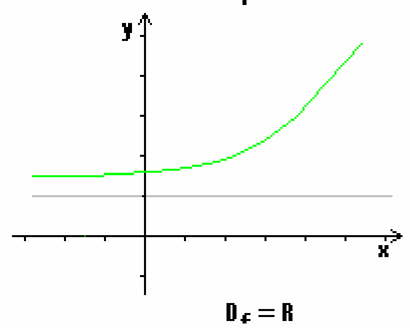
b.



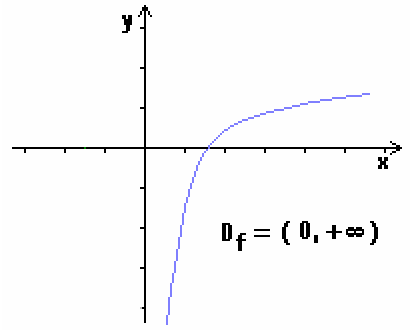
c.



d.



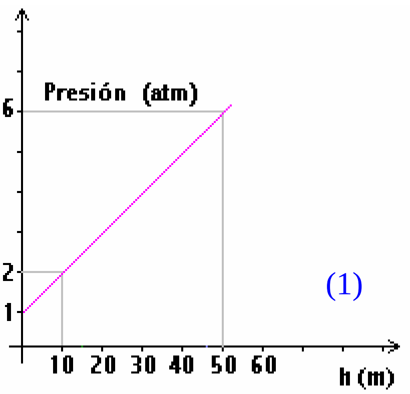
e.

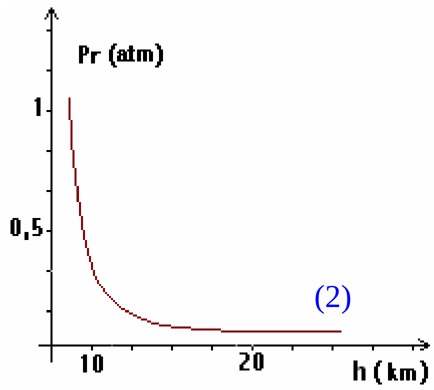


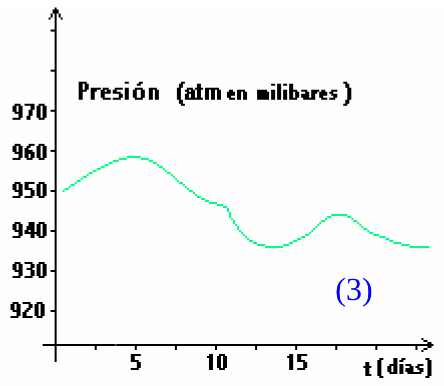
2.3.1 CARACTERÍSTICAS GLOBALES DE LAS GRÁFICAS

VARIACIONES DE UNA FUNCIÓN

Las siguientes gráficas muestran las variaciones de la presión atmosférica.





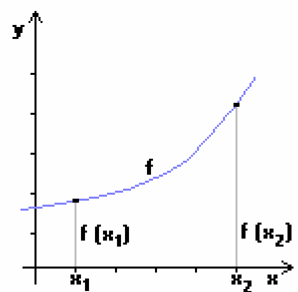
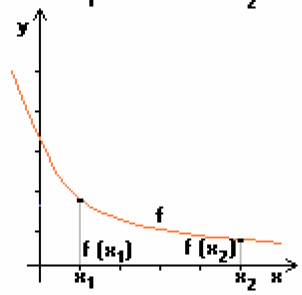


- En (1) se muestra cómo varía la presión al sumergirnos en el agua. Por cada *10m* que descendemos la presión **aumenta** una atmósfera (*1 atm*), luego la *p = f(h)* y es una función **creciente**.

- En (2) se muestra la variación de la presión atmosférica con la altura, en principio disminuye más rápidamente, luego *p = f(h)* y es una función **decreciente**

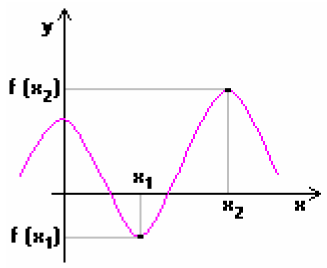
- En (3) se muestra la variación de la presión atmosférica en un cierto lugar, durante un período de 20 días, *luego p = f(t)*
  Presenta momentos donde **crece** y otros donde **decrece**, un valor **máximo**, el tercer día y otro **mínimo**, el día *10.*

2.3.2 FUNCIONES CRECIENTES Y/O DECRECIENTES

DEFINICIÓN	FORMA DE LA GRÁFICA
• *f* **crece** en un intervalo I si $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$ siempre que $x_1 < x_2$ en I	
• *f* **decrece** en un intervalo *I* si $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$ siempre que $x_1 < x_2$ en I	

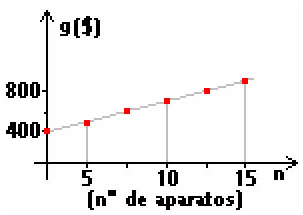
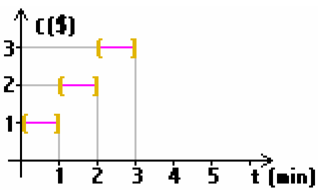
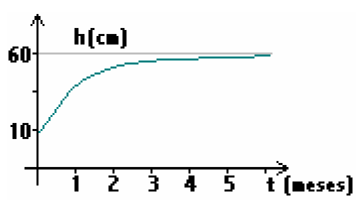
2.3.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Alrededor de un **mínimo** la función pasa de ***decreciente a creciente*** y alrededor de un **máximo** pasa de ***creciente a decreciente.***

DEFINICIÓN	FORMA DE LA GRÁFICA
• ***f*** alcanza un **mínimo local** en x_1 si $f(x_1) \leq f(x)$ para todos los valores de x "próximos" a x_1 • ***f*** alcanza un **máximo local** en x_2 si $f(x_2) \geq f(x)$ para todos los valores de x "próximos" a x_2	

2.3.4 CONTINUIDAD – DISCONTINUIDAD

Analicemos las siguientes gráficas, que representan las situaciones problemáticas planteadas.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA	GRÁFICA	OBSERVACIÓN
1) Las ganancias mensuales de un representante de computadoras son de \$ 400 fijos, más \$ 20 por cada aparato que vende, entonces la ganancia depende del número de aparatos vendidos. $g = f(n)$		La variable independiente sólo tiene sentido para los valores 0, 1,2 3,… pues no se puede vender un número fraccionado de computadoras.
2) El costo de una llamada diurna de larga distancia es de \$ 0, 57 para el primer minuto y de \$ 0,56 por cada minuto adicional (o fracción de minuto), entonces el costo depende del tiempo. $C = f(t)$		La variable independiente "t" varía en intervalos regulares de 1 minuto.
3) La gráfica muestra el crecimiento de una planta con el paso del tiempo, la altura depende del tiempo. $h = f(t)$		La variación es suave, sin saltos bruscos.

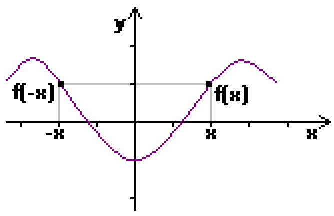
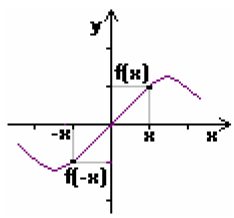
Estos ejemplos nos muestran que existen funciones discontinuas, como las que representan la primera y segunda situación problemática, o continuas, como la de la tercera.

- En la primera gráfica la variable independiente pasa de un valor a otro por saltos, la variable se llama **discreta** y la función no es una línea sino un conjunto de puntos..

- En la segunda gráfica, aunque la variable independiente es continua, la función presenta saltos, estos saltos son las discontinuidades de la función.

- En la tercera gráfica la función no presenta discontinuidades de ningún tipo.

2.3.5 FUNCIONES PARES E IMPARES

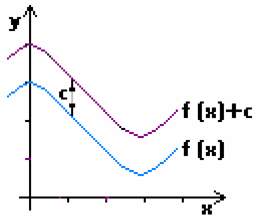
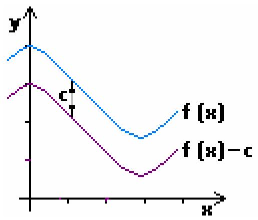
DEFINICIÓN	SIMETRÍA	FORMA DE LA GRÁFICA
• ***f*** **es <u>par</u> si** $f(x) = f(-x)$ $\forall\ x \in D_f$	La gráfica de la función es **simétrica respecto del eje y.**	
f **es <u>impar</u> si** $f(x) = -f(-x)$ $\forall\ x \in D_f$	**La gráfica de la función es simétrica respecto al origen.**	

2.3.6 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

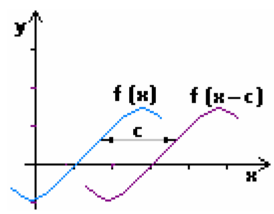
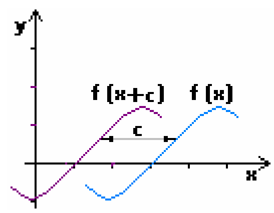
Si conocemos la gráfica de y = f(x) vamos a analizar cómo ciertas transformaciones modifican su gráfica, en particular, estudiamos

- **DESPLAZAMIENTOS** $\left\{\begin{array}{l}\text{verticales}\\ \text{horizontales}\end{array}\right.$

- ***DESPLAZAMIENTO VERTICAL DE LAS GRÁFICAS.***

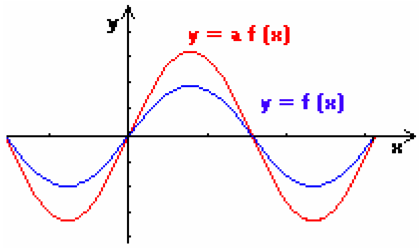
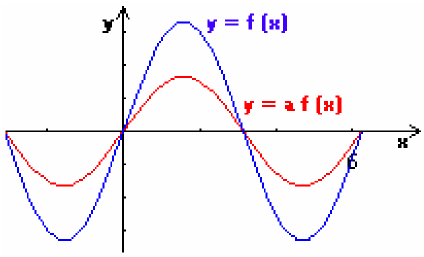
DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y = f(x) + c$ $(c>0)$	La gráfica se desplaza “c” unidadeshacia arriba	
$y = f(x) - c$ $(c>0)$	La gráfica se desplaza “c” unidades hacia abajo	

- ***DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DE LAS GRÁFICAS.***

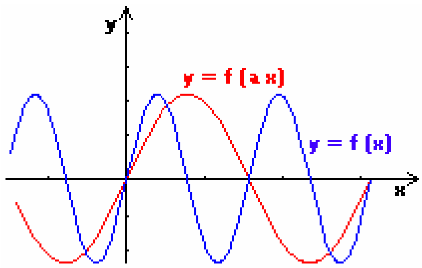
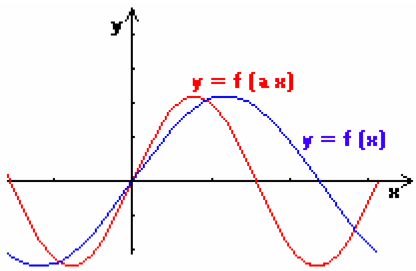
DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y=f(x-c)$	La gráfica se desplaza “c” unidades hacia la derecha	
$y = f(x+c)$	La gráfica se desplaza “c” unidades hacia la izquierda	

- **EXPANSIONES / COMPRESIONES** $\begin{cases} \text{verticales} \\ \text{horizontales} \end{cases}$

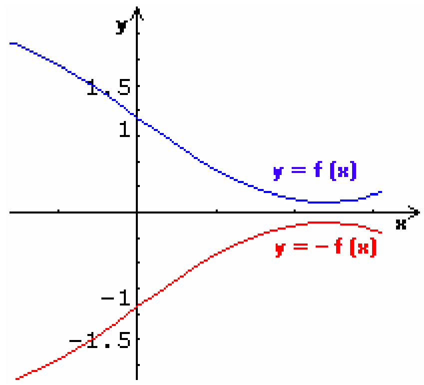
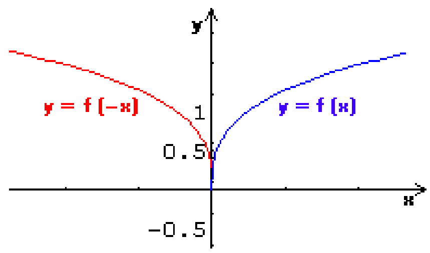
- ***EXPANSIONES / COMPRESIONES VERTICALES***

DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y = a\ f(x)$ $a > 1$	La gráfica se expande verticalmente en un factor a "a"	
$y = a\ f(x)$ $0 < a < 1$	La gráfica se comprime verticalmente en factor igual a "a"	

- ***EXPANSIONES / COMPRESIONES HORIZONTAL***

DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y = f(a\,x)$ $a > 1$	La gráfica se comprime horizontalmente.	
$y = f(a\,x)$ $0 < a < 1$	La gráfica se expande horizontalmente.	

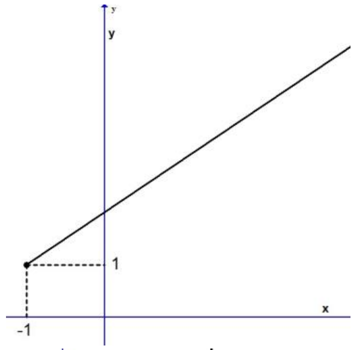
- ***REFLEXIONES***

DEFINICIÓN	COMO OBTENER LA GRÁFICA	APARIENCIA DE LA GRÁFICA
$y = - f (x)$	La gráfica se refleja respecto del eje x	
$y = f (- x)$	La gráfica se refleja respecto del eje y	

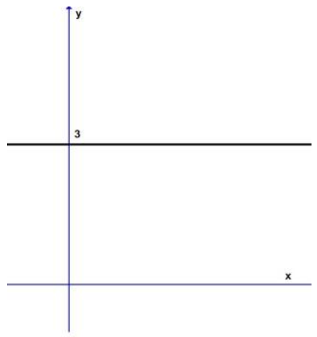
ACTIVIDADES

1) Determiná si las siguientes gráficas corresponden a funciones o no. En caso afirmativo, indicá dominio e imagen.

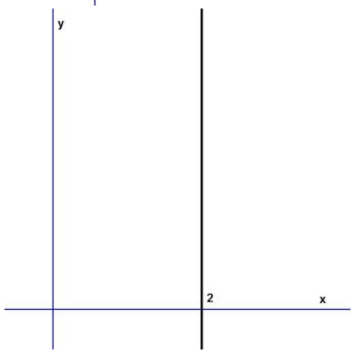
a)



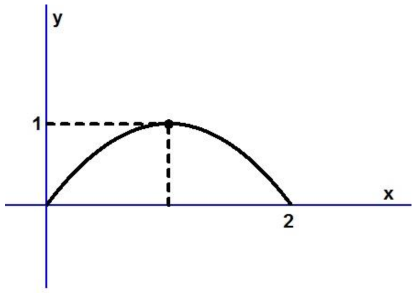
b)



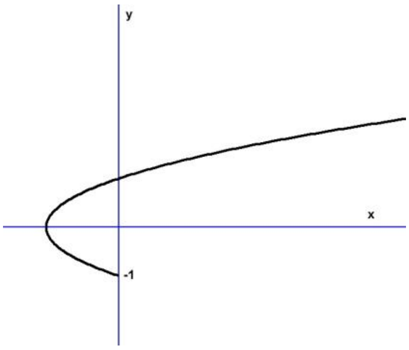
c)



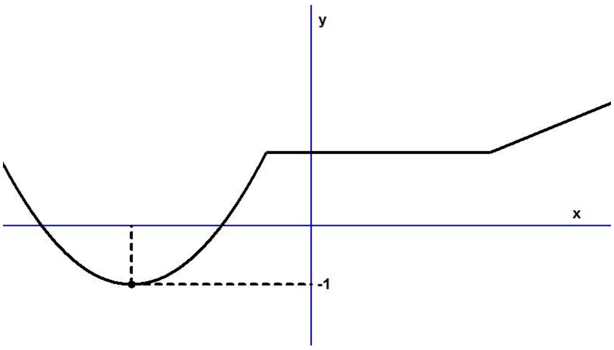
d)



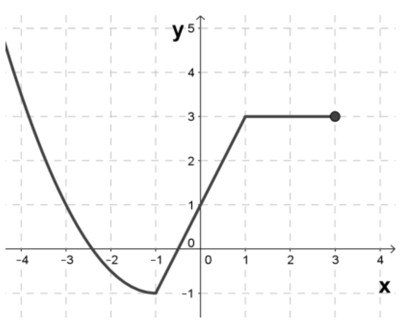
e)



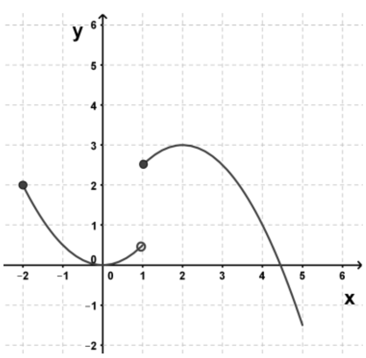
f)



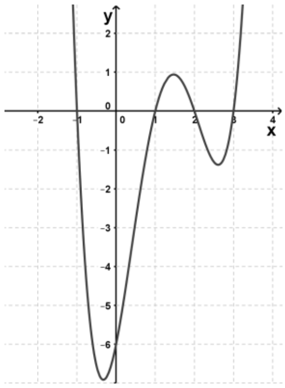
2) Dada la gráfica de la función “f”:



Función 1



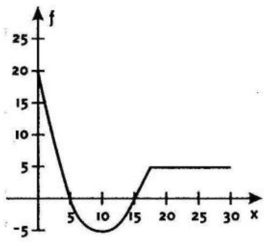
Función 2

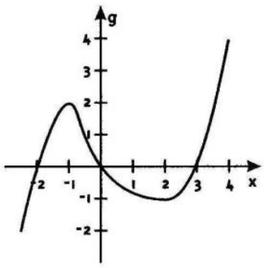


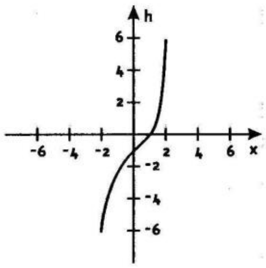
Función 3

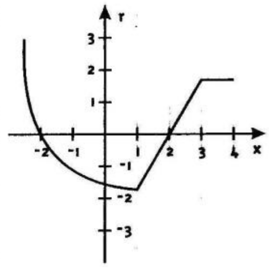
a) Determiná dominio e imagen.
b) Calculá *f(-1); f(0); f(1); f(3)*
c) Indicá los intervalos donde crecen y donde decrecen. En el caso de existir, encontrá los máximos/mínimos.

3) Analizá las características pedidas para cada función graficada:









Dom *f* = …………. Im *f* = …………. Crecimiento de *f*: ………………………………

Máximos de *h:* ………. Im *h* = ………. Ceros de *g*: ……………………………………..

Dom *g* = ………. Mínimos de *g*: ………. Ordenada al origen de *g*: ………….

Dom *r* = ………. Decrecimiento de *r*: ………………………………

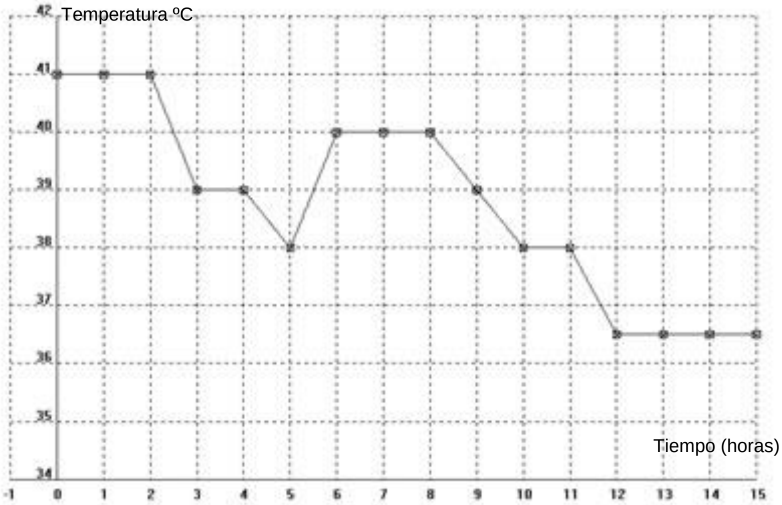
f(0) = ……… *g*(2) = ………. *r*(4) = ……….

f(x) = 10 si x = …… *r*(x) = 0 si x = ……

Escribe dos pares ordenados que pertenezcan a *g* que tengan la misma imagen: …………………

Escribe dos pares ordenados que pertenezcan a *r* que tengan imágenes opuestas: ………………...

4) La siguiente gráfica describe la evolución de la temperatura de un paciente con el paso del tiempo:



a) En términos del problema, identificá cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente. ¿Qué unidades se toman en cada uno de los ejes?

b) Si se considera normal una temperatura de 36,5º C, ¿cuántas horas estuvo enfermo el paciente?

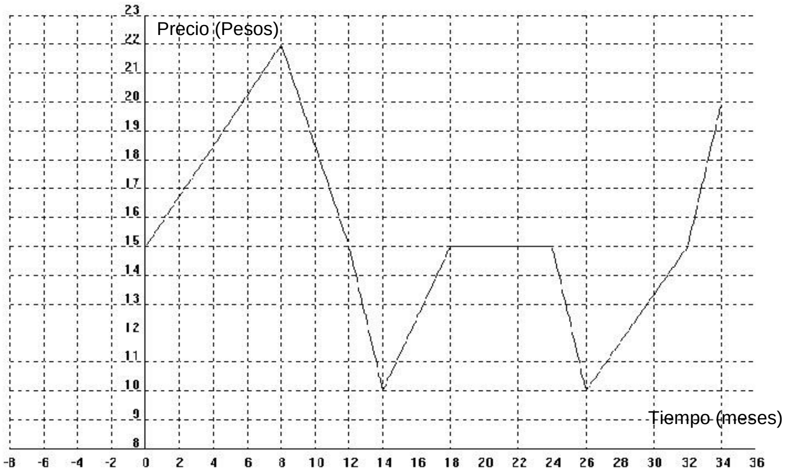
c) ¿Qué significa que la gráfica contenga al punto (5, 38)?

d) ¿Qué significan los tramos decrecientes?

e) ¿En qué períodos su temperatura ha sido estable?

f) ¿Cuándo es máxima la temperatura? ¿Cuándo es mínima?

5) El departamento de marketing de una empresa importadora hizo un estudio de la variación del precio de uno de sus productos y confeccionó el siguiente gráfico:



a) En términos del problema, identificá la variable independiente y la variable dependiente.

b) ¿Cuánto tiempo duró la investigación?

c) ¿Entre qué valores varió el precio en el período analizado?

d) ¿Qué significa que la gráfica contenga al punto (26,10)

e) Estimá f(6) e interprétala en términos del problema.

f) ¿En qué momento el precio fue de $15?

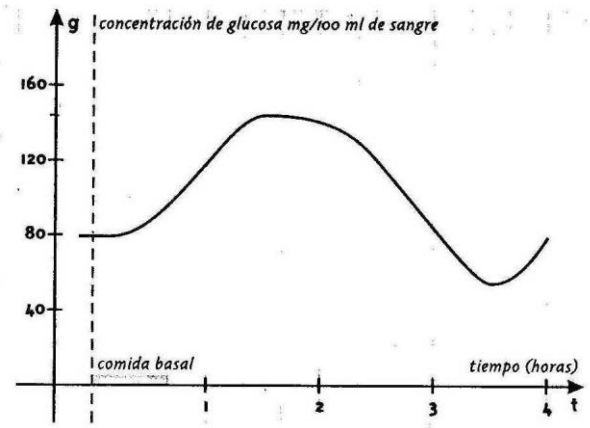
g) ¿Cuál es la ordenada al origen? ¿Qué significa en términos del problema?

h) ¿Qué significan los tramos decrecientes? Indícalos.

i) ¿El precio se mantuvo constante en algún momento? Si tu respuesta es afirmativa, indicá cuándo.

j) ¿Cuál fue el precio más alto que alcanzó el producto en el período estudiado? ¿En qué momento se observó?

6) Después de ingerir una comida rica en carbohidratos, la concentración de glucosa en la sangre se eleva. El gráfico muestra cómo nuestro organismo regula la cantidad de glucosa.



a) Identificá cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente.

b) ¿Qué significa para el problema el par (0,80)? ¿y matemáticamente?

c) ¿Tiene raíces esta función? ¿Qué indica esto en términos del problema?

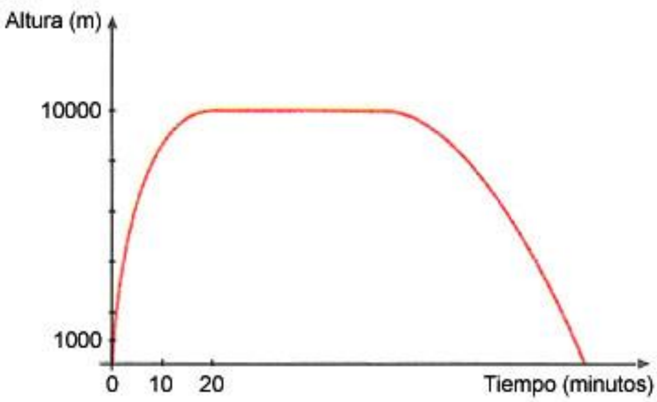
d) ¿Qué dominio tiene la función graficada? ¿cuál es su imagen?

e) Completá e interpretá el significado en el problema:

(1;___) (___; 145)

f) Indicá los intervalos de crecimiento. ¿Cómo los interpretarías en términos del problema?

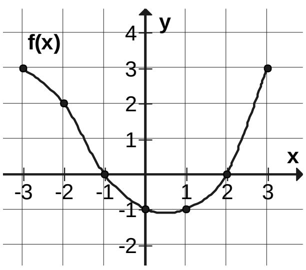
7) Una aerolínea registró la altura a la que vuela un avión que parte de un aeropuerto ubicado a nivel del mar, durante un viaje. Lo representaron de la siguiente manera:



a) Si el avión parte de un aeropuerto que está a 1000 metros de altura respecto del nivel del mar y realiza un viaje en las mismas condiciones, ¿cómo será el gráfico de la función que vincula el tiempo y la altura respecto del nivel del mar?

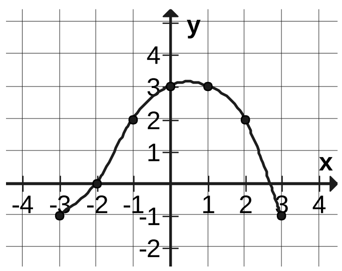
b) ¿Cómo será el gráfico de otro avión que sale desde el nivel del mar y realiza un viaje en las mismas condiciones pero parte veinte minutos más tarde que el primer avión?

8) Asociá gráfico con expresión, sabiendo que la gráfica de la función "f" es la siguiente:

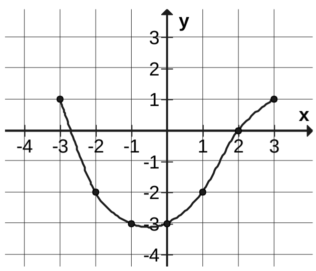


i. *y = f(x)-2*
ii. *y = f(x-2)*
iii. *y = - f(x) +2*
iv. *y = f(- x) - 2*

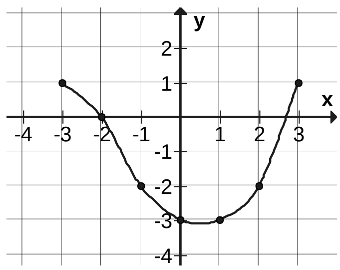
a)



b)

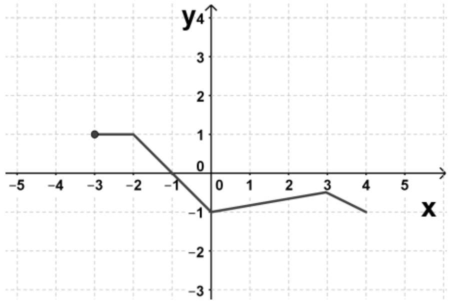


c)



9) La gráfica de una función "f" se muestra en la figura. A partir de la misma dibujá la gráfica de:

a) *y = f(x-2).*
b) *y = f(x) – 2.*
c) *y = 2 f(x).*
d) *y = f(-x).*
e) *y = 3 – f(x) .*
f) *y = ½ f(x+ 1).*



10) A partir de la expresión de la función "f" dada, encontrá la expresión que represente las transformaciones detalladas:

a) $f(x) = x^2$ desplazada hacia arriba tres unidades y dos unidades hacia la derecha.

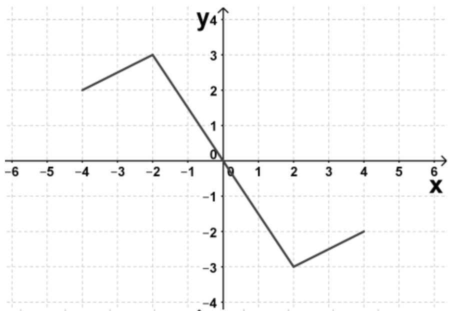
b) $f(x) = x^3$ alargada verticalmente en un factor dos y desplazada una unidad hacia la izquierda.

c) $f(x) = \sqrt{x}$ reflejada sobre el eje X y desplazada hacia abajo dos unidades.

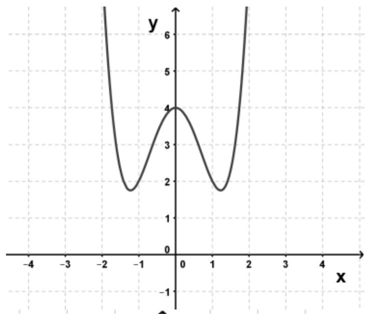
d) $f(x) = sen(x)$ acortada verticalmente a la mitad y reflejada con respecto al eje Y.

11) Determiná si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos opciones:

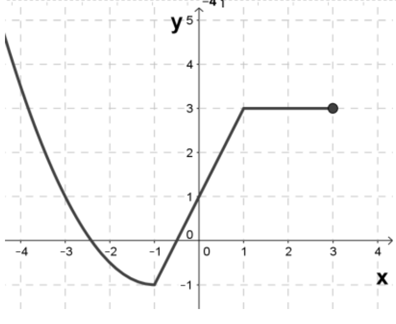
a)



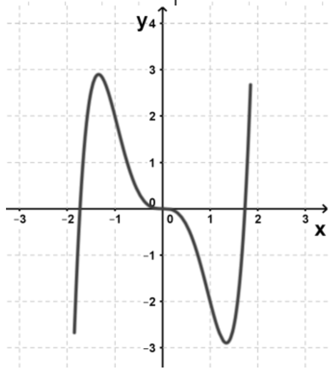
b)



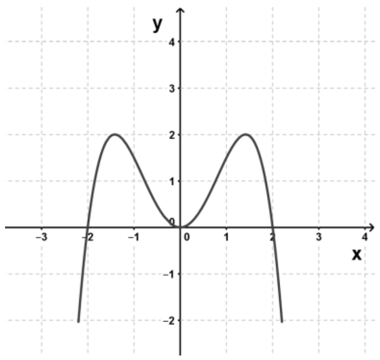
c)



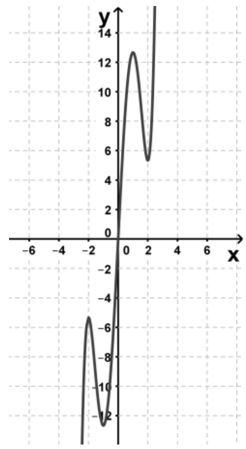
d)



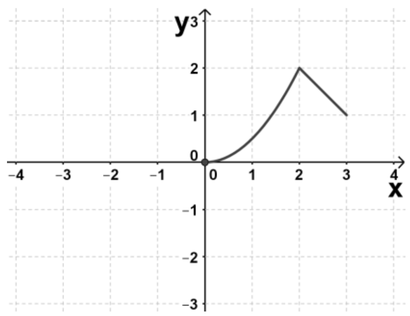
e)

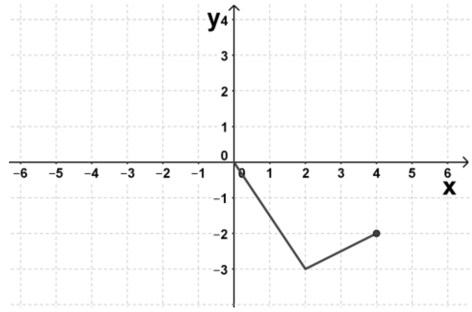


f)



12) Completá los siguientes gráficos para que correspondan a funciones pares y luego para que correspondan a funciones impares:





13) En cada caso, realizá el gráfico de una función "f" que cumpla con las condiciones pedidas:

a) Dom f = $[-4,5]$ Im f = $[-3,6]$
Máximo: $(-1,3)$ Mínimo: $(2,-3)$
f(-3) = f(0) = f(4) = 0
f es creciente en $(-4,-1)$ y $(2,5)$

b) Corta al eje de abscisas en $x = -5$, $x = -1$, $x = 2$.
Creciente: $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$
Decreciente: $(-3,1)$

c) Es una función par .
Ordenada al origen 3.
f(3) = -1 y f(- 2) = 0

d) Es una función impar .
Ordenada al origen 0.
f(2) = -1 y f(- 3) = 2

Cada representación gráfica que hiciste, ¿es única? ¿por qué?
Completá el análisis del gráfico que confeccionaste teniendo en cuenta todos los elementos estudiados: crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, continuidad, paridad.

14) Para cada uno de los siguientes enunciados, escribí una fórmula que represente a la función e indicá cuál es su dominio:

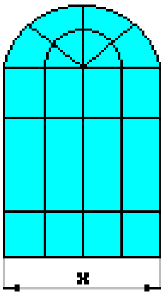
a) Un rectángulo tiene un perímetro de 20 cm. Expresá el área A del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.

b) Expresá el área A de un triángulo equilátero como una función de la longitud del lado.

c) Expresá el radio de un círculo como una función de su área.

d) La suma de al longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es 80 cm. Encontrá la función que da la superficie de ese triángulo dependiendo de la longitud de su base.

e) Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo sobrepuesto. Si el perímetro de la ventana es de 12 m, expresá el área de la ventana como una función del ancho de la misma.



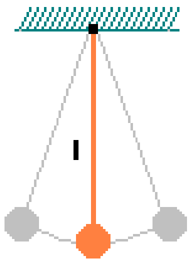
f) Un envase cilíndrico tiene una altura igual al triple de su radio R. Determiná la expresión su superficie lateral en función de R.

g) Un tanque de acero para gas tiene una forma de cilindro recto de 3 metros de altura, con una semiesfera unida a cada extremo. Expresá el volumen del tanque como una función del radio de la circunferencia base del cilindro.

h) Un recipiente de almacenamiento de base rectangular, sin tapa, tiene 10 m^3 de volumen. La longitud del largo de su base es el doble del ancho. El material de la base cuesta \$10 por metro cuadrado, y el de los lados, \$6 por metro cuadrado. Expresá el costo de los materiales en función del ancho de la base.

i) Dos barcos zarpan simultáneamente de un puerto. Uno navega hacia el sur a 22km/h y el otro hacia el este a 30 km/h. Expresá la distancia entre los barcos como una función del tiempo (en horas) transcurrido desde su salida.

j) El período de un péndulo (tiempo transcurrido en una oscilación completa) varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud del mismo. Expresá simbólicamente esta relación.
¿Cuánto se debe modificar la longitud del péndulo para duplicar el período?



k) La presión P de una muestra de gas es directamente proporcional a la temperatura T e inversamente proporcional a su volumen V. Escribí las fórmulas que expresen estas relaciones.

l) Un cable de 10 metros de longitud se cortará en dos partes. Con una de ellas se construirá un cuadrado y con la otra un círculo. Expresá el área total encerrada por el cable en función de la longitud del lado del cuadrado.

15) Determiná si las siguientes funciones tienen el dominio que se indica. Justificá tu respuesta.

a) $f(x) = 2x^2 + 4$ $\qquad D_f = R$

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{5-2x}$ $\qquad D_f = R - \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 9}$ $\qquad D_f = R - \{3\}$

d) $f(x) = \sqrt{3-x}$ $\qquad D_f = [3, +\infty)$

e) $f(x) = \sqrt{(x+1).(5-x)}$ $\qquad D_f = [-1, 5]$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-3}}$ $\qquad D_f = [3, +\infty)$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4}$ $\qquad D_f = [1, +\infty)$

h) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)\cdot\sqrt{x+3}}$ $\qquad D_f = (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2}{4 - x^2}}$ $\qquad D_f = (2, +\infty)$

j) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\left|\frac{1}{2}x - 1\right| - 3}}$ $\qquad D_f = (-\infty, -4) \cup (8, +\infty)$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

Se sabe que cada 32 metros de profundidad bajo la tierra, la temperatura aumenta un grado. Si en la superficie la temperatura es de 10ºC.

a) Encontrá la fórmula que relaciona la profundidad con la temperatura.
b) Un agua termal que sale a 79ºC ¿De que profundidad proviene?.
c) Graficá.

SOLUCIÓN:

$$Llamamos\begin{cases} T = temperatura \\ h = profundidad \end{cases}$$

a) De acuerdo con los datos, sabemos que por cada *32* metros de profundidad, la temperatura aumenta un grado. Entonces:

$$\boxed{T = \frac{1}{32}h}$$

Como la temperatura *T* en la superficie es de *10ºC* la fórmula final es:

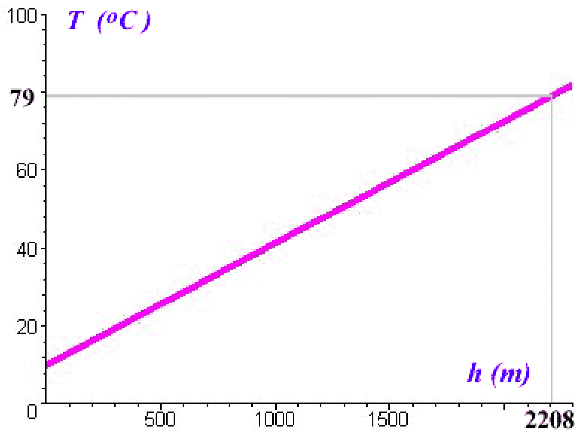
$$\boxed{T = 10 + \frac{1}{32}h}$$

b) Si *T = 79 ºC* , ¿Cuál será el valor de *h*?

$$79 = 10 + \frac{1}{32}h \longrightarrow 69 = \frac{1}{32}h \rightarrow$$

$$h = 2208 \ metros$$

c) El aumento es uniforme, la gráfica de la función es una recta.



La función que utilizamos en el problema anterior es una función lineal y su fórmula es:

$$T(h) = 10 + \frac{1}{32}h$$

Entonces, una función lineal se expresa por la fórmula:

$$f(x) = ax + b \qquad con \quad a \; y \; b \; \in R.$$

Una función lineal es una función $f : R \to R$ ***de la forma:***
$f(x) = ax + b$ con a y b ∈ a R

El ***dominio*** de la función lineal es el conjunto de los números reales.

La ***gráfica*** de una función lineal es una recta del plano, y recíprocamente, toda recta del plano que ***no*** es perpendicular al eje *x*, es la gráfica de una función lineal.

Un punto $P_o(x_o, y_o)$ pertenece a la recta de ecuación $y = ax + b$ si y sólo si sus coordenadas verifican $y_o = ax_o + b$.

Así en la gráfica del problema anterior el punto *(2208 , 79)* pertenece a la recta porque verifica la ecuación dada.

En cambio el punto *(0 , 20)* no pertenece a la recta, reemplazándolo en la ecuación se obtiene:

$$T = 10 + \frac{1}{32}h \quad \to \quad 20 = 10 + \frac{1}{32} \cdot 0$$

$$\therefore 20 \neq 10$$

¿?

¿ Las rectas paralelas al eje *y*, son funciones lineales?.

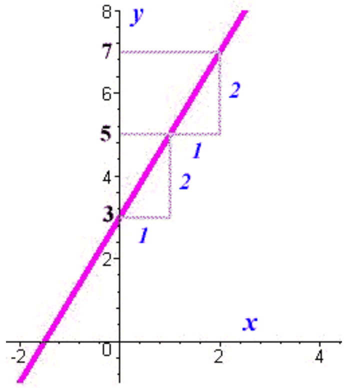
2.4.2 PENDIENTE Y ORDENADA EN EL ORIGEN

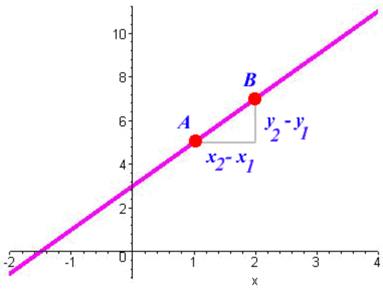
Consideremos la gráfica de $y = 2x + 3$.

En la figura marcamos los puntos *(0,3)*, *(1, 5)* ; *(2,7)*. Se puede observar que en todos los casos que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2$$

Siendo *2* el valor de *"a"* correspondiente a la recta.



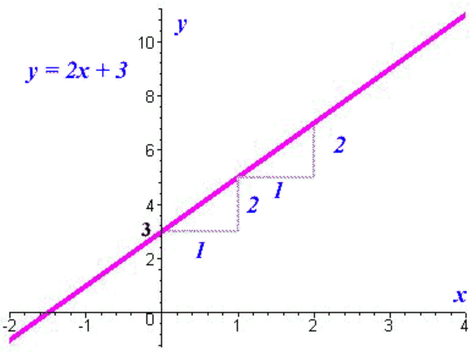


Al valor $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ *se lo llama **pendiente** de la recta e indica la inclinación de la recta respecto al eje x positivo.*

Gráficamente el valor de ***a*** indica lo siguiente:

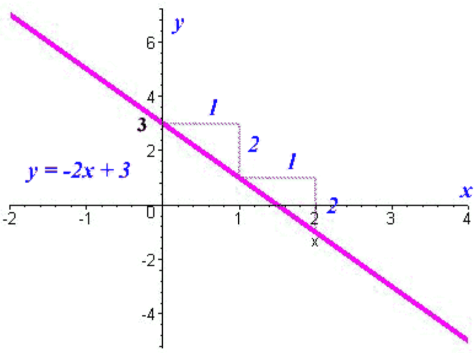
¿?

Si los valores de la ordenada son iguales por cada unidad que se desplaza, "x" hacia la derecha:



***a* = 2**

Los valores de *y* varían dos unidades hacia arriba por cada unidad que aumenta *x*.



***a* = - 2**

Los valores de *y* varían dos unidades hacia abajo por cada unidad que aumenta *x*.

Gráficamente "a" indica la cantidad de unidades que se desplaza la ordenada y (hacia arriba o hacia abajo) por cada unidad que se desplaza la abscisa x hacia la derecha.

La función definida por:

$$f(x) = ax + b \quad es \quad \begin{cases} creciente & si \quad a > 0 \\ decreciente & si \quad a < 0 \\ constante & si \quad a = 0 \end{cases}$$

- La recta de ecuación $f(x) = ax + b$ corta al eje y en y en el punto $(0\ ,b)$, es decir, $f(0) = b$, el coeficiente " b" recibe el nombre de ***Ordenada en el origen.***

¿?

¿ Por qué es tan importante la función lineal?.

- Los valores de a y b se llaman ***parámetros*** y para cada recta tienen un valor determinado. Si variamos el valor de estos parámetros se obtienen las distintas rectas.

- Si b=0, las ecuaciones $y = a\ x$ representan rectas que pasan por el origen de coordenadas. Estas funciones se llaman ***funciones de proporcionalidad.***

- Como $\dfrac{y}{x} = a$, esto indica que la relación entre *x* e *y* es ***constante***, es decir, *x* e *y* son ***proporcionales*** y el número "*a*" es la ***relación de proporcionalidad***.

2.4.3 FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

No siempre se conocen la ***pendiente*** y la ***ordenada al origen***; los datos que se tienen pueden ser dos puntos, o un punto y la pendiente. Analizamos como se obtiene su ecuación en estos casos.

a.- SE CONOCEN DOS PUNTOS DE LA RECTA.

Consideremos la siguiente situación:

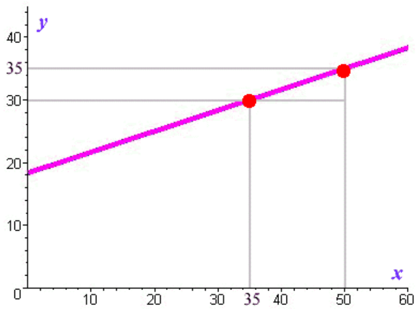
SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

Un fabricante de zapatos coloca en el mercado 50 (miles de pares) cuando el precio es de $ 35 (pesos por par) y de 35 cuando cuestan $ 30.
Determiná la ecuación de la oferta suponiendo que el precio y la cantidad se relacionan linealmente.

SOLUCIÓN:

Asignamos nombres a los datos

Precio (y)	Cantidad (x)
$35	50
$30	35



De la gráfica correspondiente obtenemos:

$$a=\frac{y_1-y_o}{x_1-x_o} \qquad a=\frac{35-30}{50-35}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3} \qquad \boxed{a=\frac{1}{3}}$$

Luego $\quad y=ax+b \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{3}x+b$

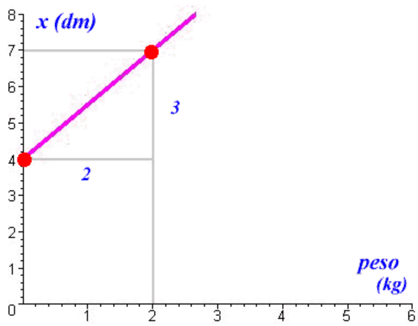
Calculamos "b" sustituyendo las coordenadas de un punto:

$(35\,,30)\in recta \Rightarrow 30=\frac{1}{3}\cdot 35+b$ transponiendo los términos nos queda:

$$30-\frac{35}{3}=b \quad \Rightarrow \quad \frac{90-35}{3}=b \quad \Rightarrow \boxed{b=\frac{55}{3}}$$

La ecuación que rige la oferta será:

$$\boxed{y=\frac{1}{3}x+\frac{55}{3}}$$



b.- SE CONOCE LA PENDIENTE Y UN PUNTO DE LA RECTA

Consideremos la siguiente situación

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2

Un resorte que cuelga del techo, mide 4 dm. Si se cuelga un peso en su extremo libre, el resorte se estira proporcionalmente al peso aplicado. Si colgamos un peso de 2 kg, observamos que se estira 3 dm llegando a medir 7 dm.

Determiná la ecuación del alargamiento del resorte en función del peso colgado.

SOLUCIÓN:

Graficamos según los datos, y observamos que la pendiente es $a=\frac{3}{2}$, como la longitud inicial es de *4 dm*, y conocemos el punto $(0\ ,4)$.

Luego expresamos: $y=ax+b$

Según los datos $y=\frac{3}{2}x+b \Rightarrow \; 4=\frac{3}{2}\cdot 0+b \quad \Rightarrow \quad \boxed{b=4}$

Luego:

$$\boxed{y=\frac{3}{2}x+4}$$

En general para calcular la ecuación de la recta que pasa por $P_o(x_o,y_o)$ y posee pendiente ***a***, se tiene:

Si $P_o(x_o,y_o)\in\ recta$

$\Rightarrow y_o=ax_o+b$

despejando el valor de "b"

$\Rightarrow b=y_o-ax_o$

$y=ax+y_o-ax_o \Rightarrow$

$y=a(x-x_o)+y_o$

c.- SE CONOCEN LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN CON LOS EJES COORDENADOS.

Consideremos la siguiente situación:

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 3

La demanda del mercado de un artículo que se vende a un precio **p** *por unidad, está dado por la ecuación:*

$$\frac{p}{10} + \frac{q}{30} = 1 \,.$$

1) Verificá que la expresión $q = f(p)$ es una función lineal.

2) Graficá e interpretá económicamente los resultados.

SOLUCIÓN:

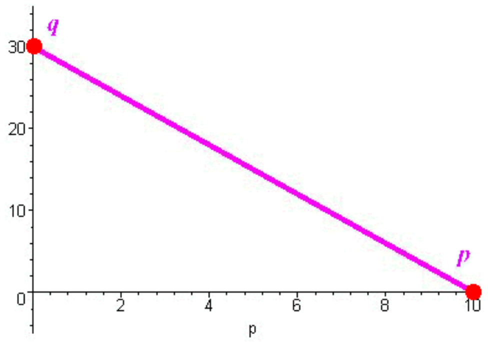
1) Despejando el valor de ***q*** se obtiene:

$$\frac{q}{30} = 1 - \frac{1}{10}p \Rightarrow \boxed{q = 30 - 3p}$$

Luego la ecuación corresponde a una recta de *pendiente –3* y de *ordenada en el origen 30*.

El valor del precio más alto es *$10*, pero a ese precio nadie demanda el artículo.

La mayor cantidad de unidades demandas es *30*, pero es un valor ficticio ya que corresponde a un precio de *$ 0*, y el artículo no sale al mercado a ese precio.



A modo de síntesis

La ecuación de la recta que:

- pasa por los puntos $P(x_o, y_o)$ y $P(x_1, y_1)$ es:

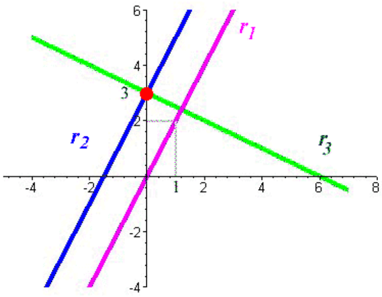
$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} * (x - x_o) + y_o$$

- pasa por $P(x_o, y_o)$ y tiene pendiente ***a es:***

$$y = a(x - x_o) + y_o$$

- corta al eje *x* en ***a*** y al eje *y* en ***b*** es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



En la figura se puede observar que las rectas:

- r_1 y r_2 tienen igual inclinación, por lo tanto ***son paralelas***
- r_1 y r_3 , igual r_2 y r_3 que se cortan en ángulo recto, luego ***son pependiculares***

ECUACIÓN DE LAS RECTAS

- Las rectas r_1 y r_2 tienen igual pendiente $\boldsymbol{a = 2}$; además

  r_1 tiene ordenada en el origen igual a 0 → $\boxed{y = 2x}$

  r_2 tiene ordenada en el origen igual a 3 → $\boxed{y = 2x + 3}$

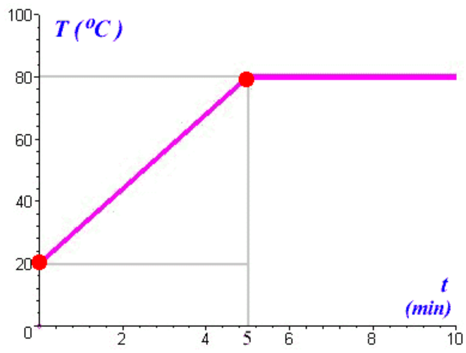
- La recta r_3 tiene pendiente de signo contrario a r_1 y r_2 y su valor es $a = -\frac{1}{2}$, como la ordenada en el origen es 3. Luego, la ecuación será

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 3}$$

En síntesis

Las rectas $y = a_1 x + b_1$ ***y*** $y = a_2 x + b_2$ ***son:***

- ***paralelas si*** $a_1 = a_2$
- ***perpendiculares***, si $a_1 = -\dfrac{1}{a_2}$



Las siguientes situaciones describen fenómenos utilizando funciones lineales por tramos.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1

La gráfica muestra como evoluciona la temperatura ***T*** *de un líquido con el paso del tiempo.*
Calculá la fórmula que representa la evolución de la temperatura en función del tiempo.

La parte de la gráfica que corresponde a $0 \le t \le 5$ es una recta con ordenada en el origen en *20* y la pendiente igual

$$a = \frac{80-20}{5-0} = \frac{60}{5} = 12$$

$$\therefore T(t) = 20 + 12t \qquad \text{si} \qquad 0 \le t \le 5$$

La parte de la gráfica que corresponde a $t>5$ es una recta horizontal de ecuación:

$$T(t)=80$$

Luego la fórmula de la función se expresa de la siguiente manera:

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 12t & si \quad 0 \le t \le 5 \\ 80 & si \quad t > 5 \end{cases}$$

¿?

¿Cuánto vale *T(1); T(3); T(5); T(7)?*

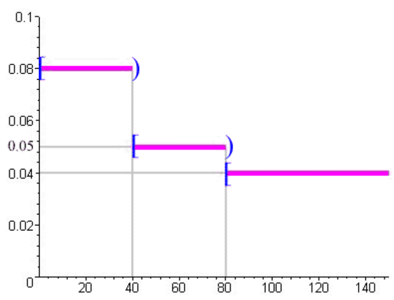
Para calcular *T(1)* utilizaremos:
$T(t) = 20 + 12t$
porque $1 < 5$, luego
$T(1) = 20 + 12 = 32$.
Idem para calcular *T(3)* y *T(5).*
$T(3) = 20 + 12 \times 3$
$= 20 + 32 = 52$.
$T(5) = 20 + 12 \times 5$
$= 20 + 60 = 80$
Para calcular *T(7)* se utiliza *T(t)=80* porque *7>5*, luego *T(7)=80.*

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2

En un negocio donde se hacen fotocopias, el precio por unidad depende del número de copias; hasta 40 copias el precio es de \$ 0,08 cada una; de 41 a 80 copias es de \$0,05 y mas de 80 copias es de \$0,04 cada una.

a.- Graficá la función que da el costo en función de la cantidad de copias.
b.- Escribí la expresión algebraica de la función.

a.-



b.-

$$C(x) = \begin{cases} 0{,}08 & si \quad 0 \le x < 40 \\ 0{,}05 & si \quad 41 \le x < 80 \\ 0{,}04 & si \quad x \ge 81 \end{cases}$$

ACTIVIDADES

1) Dadas las rectas de ecuación:

i. $y = 2x - 3$ **ii.** $y - 5 = -3x$ **iii.** $y = x$ **iv.** $3x - 2y - 7 = 0$ **v.** $x = -2$

a) Determiná:
- → La pendiente.
- → La ordenada al origen.
- → Las intersecciones con los ejes de coordenadas.

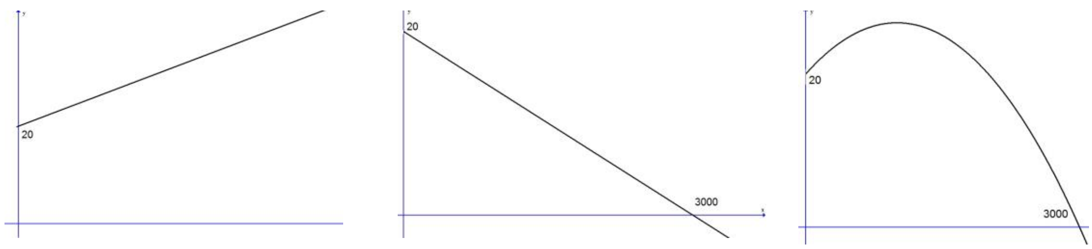
b) Representá gráficamente.

2) Una presa está construida sobre un río para tener un embalse. El nivel del agua (medido en metros) es una función del tiempo (en años) desde que la presa se construyó, y está dado por la fórmula: $N(t) = 1,4 \cdot t + 8,5$.

a) ¿Cuál es la variable independiente y que representa? ¿y la variable dependiente?
b) Graficá la situación y determiná Dominio e Imagen.
c) ¿Qué representan la pendiente y la ordenada al origen en términos del problema?
d) ¿Cuántos años deben transcurrir para que el nivel de agua sea de 12, 7 metros?
e) ¿Es verdad que a los 10 años se espera que el embalse se vacíe? ¿Por qué?

3) Un grupo de meteorólogos estudió la temperatura T (en grados centígrados) en función de la altura h respecto del nivel del mar (en metros) en una determinada región. Después de una fatigosa cantidad de mediciones para distintas alturas entre 0 metros y 15000 metros, han podido determinar la fórmula que vincula a estas dos variables: $T(h) = 20 - \frac{1}{150}h$.

a) ¿Cuál es la variable independiente y que representa? ¿y la variable dependiente?
b) Teniendo en cuenta las condiciones del estudio, ¿qué dominio consideraron lo científicos para esta función?
c) Indicá cuál de las siguientes gráficas representa a la función T(h). Justificá tu elección.



A partir de la gráfica que consideraste correcta, determiná el conjunto Imagen de T. ¿Qué información proporciona este conjunto para el estudio meteorológico?

d) ¿Cuál es la temperatura a 240 metros sobre le nivel del mar? ¿y a los 600 metros?
e) ¿Es cierto que a los 1500 metros de altura se espera tener una temperatura de 11º C? ¿Por qué?
f) ¿Cuál es la variación de temperatura por cada metro que asciende? ¿y por cada kilómetro?
g) ¿A qué altura le corresponde una temperatura de 1º C bajo cero?
h) Hallá los ceros, conjuntos de positividad y negatividad de la función. Interpretá los resultados en términos de la investigación de los meteorólogos.

4) Dada la recta: $2x - 4y + 3 = 0$ indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada una de tus respuestas.

a) Su pendiente es $\frac{3}{4}$ y su ordenada al origen es $\frac{1}{2}$.

b) Es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-3,1)$ y $(3,4)$.

c) Su gráfico corta al eje x en $x = \frac{3}{2}$.

d) Su gráfico pasa por el punto $\left(-1, \frac{5}{4}\right)$

5) En cada caso, escribí la ecuación de la función lineal que cumple con las condiciones dadas:

a) Pasa por $(-2,3)$ y tiene pendiente – 2.

b) Pasa por el origen y tiene pendiente $\frac{2}{5}$.

c) Tiene pendiente 4 e intersección con el eje *y* en – 3.

d) Tiene intersección con el eje *x* en – 3 y con el eje *y* en 5.

e) Es paralela a la recta $y = 4$ y pasa por el punto $(1,-5)$

f) Pasa por $(3,1)$ y es paralela a la recta $3x + y - 1 = 0$

g) Es perpendicular a la recta que pasa por $(1,1)$ y $(2,3)$, y pasa por el origen de coordenadas.

6) En cada caso, calculá el número real *k* tal que la recta: $6x + ky + 5 = 0$

a) Tenga ordenada al origen igual a – 3.

b) Sea paralela al eje *y*.

c) Sea paralela a la recta $x - 2y + 10 = 0$.

7) Calculá el valor de k para que las rectas $L_1 : kx + (k+1)y + 3 = 0$ y $L_2 : 3x - 2y - 11 = 0$ sean:

a) Paralelas.

b) Perpendiculares.

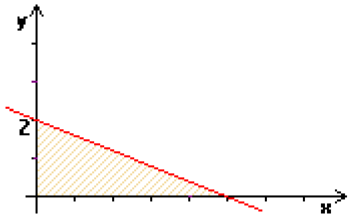
8) Determiná, gráfica y analíticamente, si los puntos $A(-3,-1)$, $B(3,3)$ y $C(-9,8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

9) Indicá si los puntos $D(-2,3)$, $E(5,-4)$ y $F(1,0)$ están alineados. Justificá tu respuesta.

10) Calculá el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

11) Encontrá la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, siendo $A(4,-4)$ y $B(-2,6)$.
<u>(Observación</u>: La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que se traza en su punto medio)

12) Dada la recta $y = mx + 2$, calculá el valor de *"m"* para que el área de la figura sea igual a *16.*



13) Si $r(t) = 3t + 2$ describí la distancia recorrida por un móvil que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, determiná:

a) La distancia recorrida por otro móvil que se desplaza a igual velocidad y que está dos unidades de distancia adelantado.

b) La distancia recorrida por otro móvil que se desplaza al doble de la velocidad y en el instante t = 0 se encuentra en el mismo punto que el primero.

c) La distancia recorrida por otro móvil que se desplaza con la misma velocidad pero en sentido contrario y parte en t = 0 del mismo punto que el primero.

d) Representá en un sistema de coordenadas cada situación.

14) A medida que el aire seco se eleva, se expande y se enfría. Si la temperatura a nivel del suelo es de 20º C y a una altitud de 1 km es de 10º C:

a) Expresá la temperatura (en °C) en función de la altitud (en km), suponiendo que la expresión es lineal.

b) Trazá la gráfica de la función que encontraste en a).

c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2,5 km?

d) ¿A qué altitud la temperatura será de -12º C?

e) ¿Cuál es la intersección con el eje x?¿que representa en términos del problema?

15) Para fabricar una pieza de automóvil se tiene, debido a sueldos y a gastos de mantenimiento de maquinarias, un costo fijo mensual de $350000. Además, el material para cada pieza cuesta $100. La pieza se vende a los mayoristas a un precio de $200 cada una. En los meses anteriores, no se pudieron ubicar en el mercado más de 12000 piezas cada mes y se decidió no fabricar más de esa cantidad esta vez.

a) Buscá una expresión para las funciones costo c(x) e ingreso i(x) durante el mes, en función de la cantidad x de piezas fabricadas o vendidas.

b) ¿Cuál es el dominio de las funciones que obtuviste?

c) Si la cantidad de piezas vendidas es igual a la cantidad de piezas fabricadas, la función b(x) se obtiene calculando la diferencia entre ingresos y costos. Encontrá la fórmula para expresar el beneficio en función de las unidades vendidas.

d) Hallá los ceros, los conjuntos de positividad y negatividad de la función beneficio y analizá qué significado tienen para el fabricante.

16) Una empresa de correo de primera clase para entrega inmediata acepta, como máximo, bultos de 20 kg y su tarifa es la siguiente:

Peso	***Tarifa***
2 kg o menos	$300 con seguro incluido
De 2 kg a 10 kg	$500 y un adicional por seguro de $50 por kilo
Más de 10 kg	$900 y un adicional por seguro de $25 por kilo

a) Encontrá una expresión C que permita calcular el costo de un envío en función del peso del bulto.

b) ¿Cuál es el dominio de C? ¿y la imagen de C?

c) Representá gráficamente.

d) ¿Cuál es el costo de enviar un bulto de 6 kg? ¿Y uno de 1,750 kg?

e) ¿Cuánto pesa un bulto cuyo costo de envío es $1335?

17) Algunos científicos opinan que la temperatura superficial promedio del mundo está aumentando en forma constante. En el año 1900 el promedio era de 8,5° C y a partir de allí calcularon un aumento lineal de 0,02° C por año.

a) Encontrá la expresión de la función que representa la situación, definiendo previamente las variables independiente y dependiente.

b) ¿Qué significa la ordenada al origen en términos de la situación?

c) ¿Cuál será la temperatura superficial promedio del mundo en el año 2100?

18) La cantidad de calor en joules requerida para convertir un gramo de agua en vapor está linealmente relacionada con la temperatura en ° C del ambiente. A 10°C esta conversión requiere 2480 joules, y cada aumento de 15°C baja 40 joules la cantidad de calor necesaria.

a) Encontrá la expresión de la función que representa la situación, definiendo previamente las variables independiente y dependiente.

b) ¿Qué representan la pendiente y la ordenada al origen en términos del problema?

c) Si la cantidad de calor necesaria es de 0 joules, ¿qué sucede con la temperatura?

19) Un grupo empresario es propietario de varios departamentos iguales. Si logra alquilar 16 tiene un ingreso neto de $92160, mientras que si alquila 20 el ingreso neto es de $115220.

a) Encontrá la expresión de la función que representa la situación, definiendo previamente las variables independiente y dependiente.

b) Representá gráficamente.

c) Determiná la cantidad de departamentos alquilados si el ingreso neto fue de $144000.

d) Determiná cuántos departamentos debe alquilar para que no exista ni perdida ni ganancia.

e) ¿Cuál será el ingreso si logra alquilar los 40 departamentos de su propiedad?

f) Determiná el Dominio de la función.

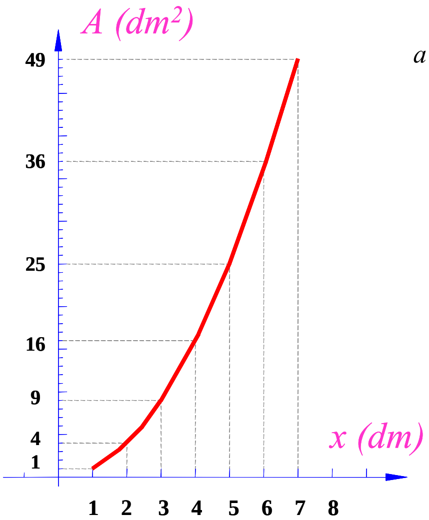
2.5.0 FUNCIONES CUADRÁTICAS

La curva que describe una pelota de básquetbol, los chorros de agua de una fuente, son parábolas. Las secciones de los faros de los coches, de las antenas que captan las emisiones de TV procedentes de satélites artificiales y muchos otros objetos presentes en la vida cotidiana, son parabólicos.

También muchas funciones se representan mediante parábolas: el área de un cuadrado en función del lado, la altura a la que se encuentra una piedra que lanzamos hacia arriba en función del tiempo transcurrido o la que cae libremente desde una cierta altura.

A continuación vamos a analizar las relaciones entre las funciones cuadráticas y las parábolas.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1



Se desea fabricar cajas, con láminas cuadradas de hojalata; que miden de 1dm a 7 dm de lado. El área de cada lámina en función del lado es:

$$A(l) = l^2$$

A partir de la tabla de valores, se grafica

L (dm)	A (dm^2)
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49

$$Df = [1,7]$$
$$If = [1,49]$$

La fórmula de la función cuadrática que se utilizó para construir el modelo de la situación es:

$f(x) = ax^2$ con $a \in \Re\ ,\ a \neq 0$

donde $Df = \Re$

La representación gráfica es una parábola.

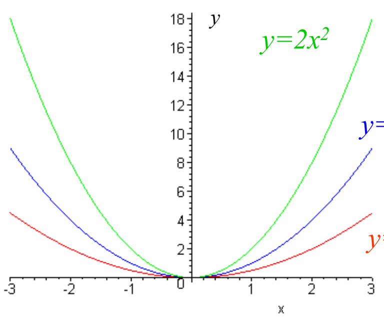
2.5.1 GRAFICO DE LAS FUNCIONES $y = ax^2$

Si a › 0, la función tiene un mínimo en el origen.

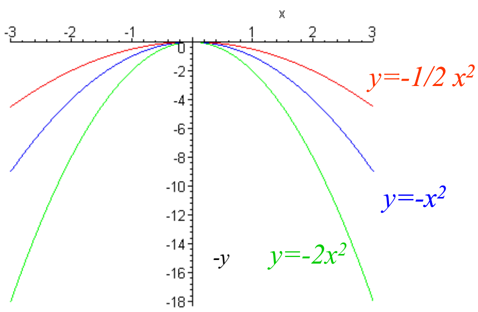
Si a ‹ 0, la función tiene un máximo en el origen.

Si $|a|$ › 1 el gráfico se obtiene contrayendo verticalmente el de $y = x^2$.

Si $|a|$ ‹ 1 el gráfico se obtiene dilatando verticalmente el de $y = x^2$.



$a > 0$



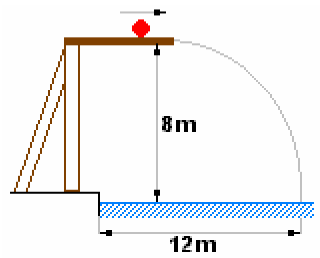
$a < 0$

Como se observa en las gráficas, la función toma el mismo valor para valores opuestos de *x,* su gráfico es simétrico respecto del eje *y*.

El eje *y* es el ***eje de simetría*** de la parábola; su ecuación es $x = 0$.

El único punto que pertenece al eje de simetría y la parábola es el ***vértice***. En estos casos es el punto $V(0,0)$.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 2



En una piscina hay un trampolín a 8 metros del agua. Lanzamos una pelota rodando y cae al agua a 12 metros del trampolín. Calculá la ecuación de la trayectoria que describe la pelota desde que sale del trampolín hasta que toca el agua.

SOLUCIÓN:

La trayectoria la podemos identificar inicialmente con la ecuación: $y = ax^2$, con $a < 0$ que se traslada verticalmente sobre el eje *y* en sentido positivo, luego podemos expresarla:

$y = ax^2 + c$ donde *c* indica la traslación en el eje *y*.

Con los datos del problema calculamos "a" y "c". La pelota sale del punto (0,8) y llega al (12,0), sustituyendo obtenemos:

$$(0,8) \quad \Rightarrow \quad 8 = a.0^2 + c \Rightarrow \quad c = 8$$

$$(12,0) \quad \Rightarrow \quad 0 = a.12^2 + 8$$

$$-8 = a.144 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-8}{144} = -0,05$$

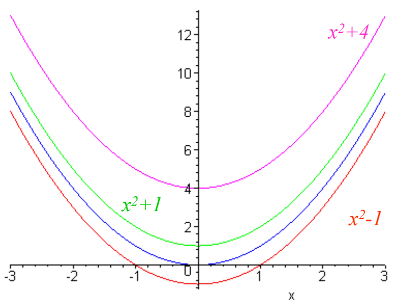
Luego, la ecuación de la trayectoria es:

$$y = -0,05.x^2 + 8$$

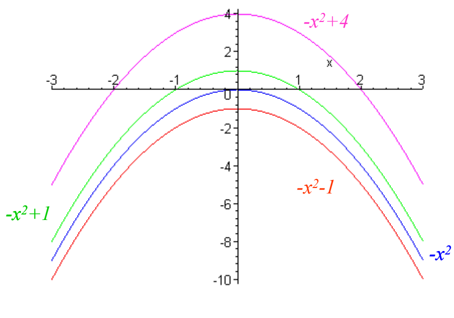
2.5.2 GRAFICO DE LAS FUNCIONES $y = ax^2 + c$

Todas las parábolas tienen como eje de simetría al eje *y*, de ecuación $x=0$.

El vértice se desplaza sobre el eje *y* según los diferentes valores de *c*: $V(0,c)$.



$a > 0$

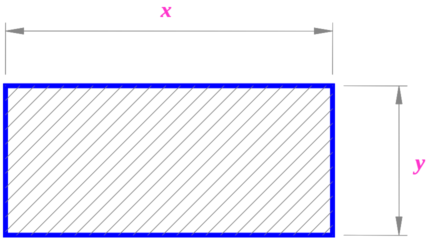


$a < 0$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 3

Se desea calcular las dimensiones del cantero rectangular de mayor área que puede cercarse con 200 metros de alambre.

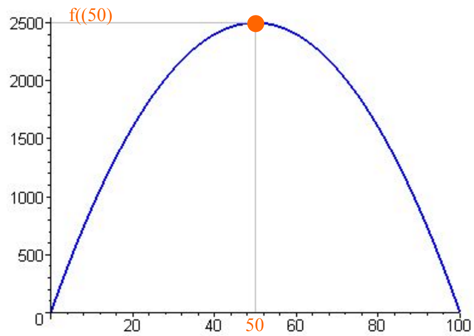
SOLUCIÓN:



- Dibujamos un diagrama.
- Asignamos nombres a los lados del rectángulo.
- Relacionamos los valores teniendo en cuenta el dato: 200 m de alambre para cercarlo, entonces:
$$200 = 2x + 2y \qquad (1)$$
- Planteamos la incógnita: área mayor:
$$A = x.y \qquad (2)$$
- De la ecuación (1), despejamos el valor de *"y"*:
$$y = \frac{200 - 2x}{2}$$
- Sustituimos el valor en (2) y obtenemos:
$$A = x.\left(\frac{200 - 2x}{2}\right) \Rightarrow A = 100x - x^2 \qquad (3)$$

Realizamos una tabla de valores y graficamos:

x	A
0	*0*
20	*1600*
40	*2400*
50	*2500*
60	*2400*
80	*1600*
100	*0*



Con la información de la tabla y la gráfica observamos que:

- El máximo de la función se obtiene si $x=50$.

Luego las dimensiones del terreno se calculan reemplazando $x = 50$ en (1), de donde $y = 50$. Por lo tanto los lados del terreno miden:

$$x=50 \;\; ; \;\; y=50.$$

¿?

¿ Qué particularidad tiene este rectángulo?
¿ Qué podés inferir de esta situación?

La expresión que permite construir un modelo con esta situación es de la forma:

$$y = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$$

En nuestro caso: $a = -1$; $x_0 = 50$; $f(x_0) = 2500$

$$y = -(x - 50)^2 + 2500$$

Efectuando las operaciones obtenemos:

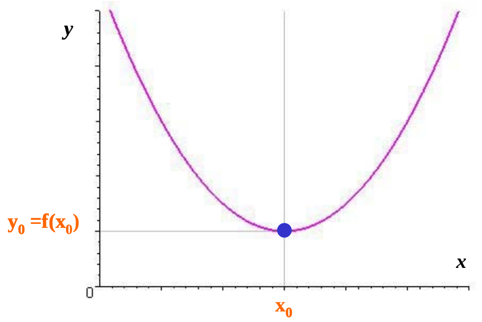
$$y = -(x^2 - 100x + 2500) + 2500$$

$$y = -x^2 + 100x - 2500 + 2500$$

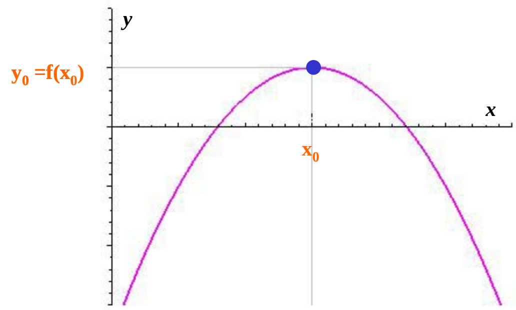
$$\boxed{y = -x^2 + 100x}$$

que coincide con la fórmula (3) que encontramos para expresar el área.

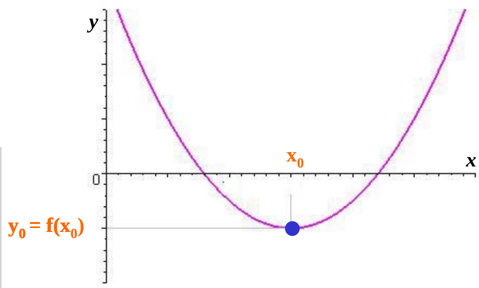
2.5.3 GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES: $y = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$



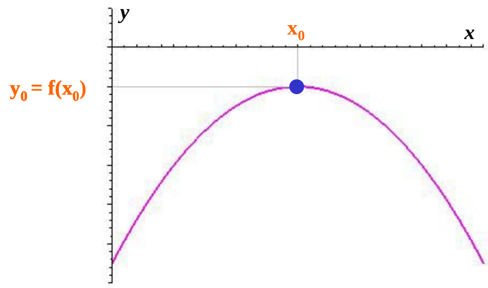
$a > 0$



$a < 0$



$a > 0$



$a < 0$

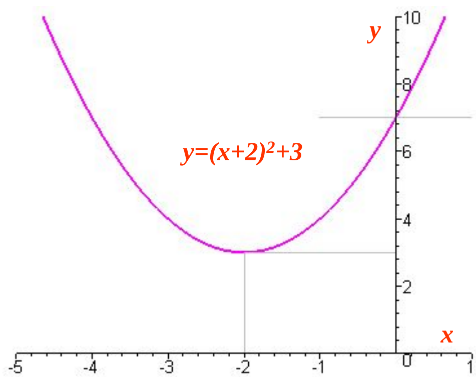
¿?

¿Existen otras posibles gráficas?. ¿Cuáles?.

- Todas las parábolas tienen como ***eje de simetría*** a la recta: $x = x_0$
- El ***vértice*** es le punto $V\,(x_0, f(x_0))$ o $V(x_0, y_0)$
- La ***intersección con el eje y*** se obtiene calculando $f\,(0)$
- La ***intersección con el eje x***, que corresponde a los ceros de la función, se obtiene calculando la solución de la ecuación: $0 = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$

ALGUNOS EJEMPLOS

1.- $y = (x + 2)^2 + 3$

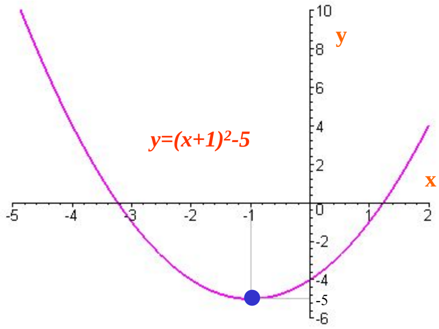


- Vértice → $V\,(-2\,,\,3)$
- Eje de simetría → $x = -2$
- Intersección eje y: $f(\,0\,) = 7$
- Intersección eje x:

$$0 = (x + 2)^2 + 3$$
$$-3 = (x + 2)^2$$

No tiene solución en R; luego no existe intersección con el eje x.

2.- $y=(x+1)^2-5$



- Vértice → $V(-1,-5)$
- Eje de simetría → $x=-1$
- Intersección eje y: $f(0)=-4$
- Intersección eje x:

$$0=(x+1)^2-5$$
$$5=(x+1)^2 \Rightarrow \sqrt{5}=|x+1|$$
$$entonces: \sqrt{5}=x+1 \quad o \quad -\sqrt{5}=x+1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-1+\sqrt{5} \\ x_2=-1-\sqrt{5} \end{cases}$$

3.- $y=-2(x-1)^2-4$

- Vértice → $V(1,-4)$
- Eje de simetría → $x=1$
- Intersección eje y: $f(0)=-6$
- Intersección eje x:

$$0=-2(x-1)^2-4$$
$$4=-2(x-1)^2$$
$$-\frac{4}{2}=(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad -2=(x-1)^2 \ \textit{no tiene solución en } R$$

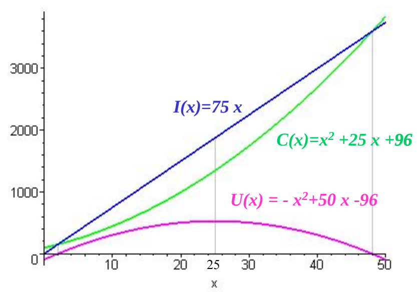
Luego no existe intersección con el eje *x*.

2.5.4 FUNCIÓN CUADRÁTICA DE LA FORMA: $f(x)=ax^2+bx+c$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Un decorador diseña y vende accesorios de pared y puede vender a un precio de \$75 c/u de los accesorios que produce. Si se fabrican x accesorios diarios, el costo total diario de producción es $C(x)=x^2+25x+96$. ¿Cuántos accesorios debe producir por día a fin de obtener las máximas utilidades?

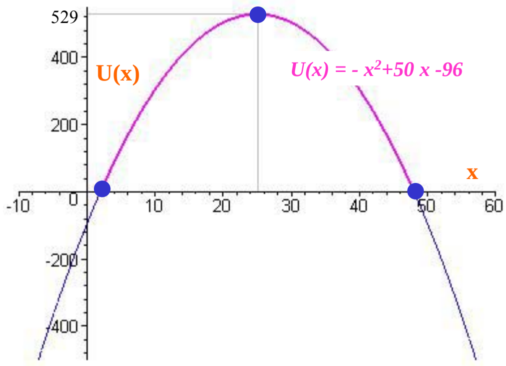
SOLUCIÓN:



- Las utilidades están dadas por las diferencias entre ingresos y costos.
- Como vende a \$75 cada accesorio, si "x " es la cantidad de accesorios, el ingreso está dado por: $I(x)=75.x$
- El costo diario según los datos se calculan por: $C(x)=x^2+25x+96$
- Luego las utilidades se determinan por: $U(x)=I(x)-C(x)$, y reemplazando:

  $U(x)=75x-x^2-25x-96$

  y operando se obtiene:



$$U(x) = -x^2 + 50x - 96$$

- Para calcular el número de accesorios que determinan las máximas utilidades tenemos que hallar el ***vértice*** de la parábola, la abscisa correspondiente dará el número pedido.
- Un camino para hallar el vértice es completar cuadrados, para llevar la función a la forma: $y = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$.
- Procedemos del siguiente modo:

$U(x) = -(x^2 - 50x) - 96$	$\rightarrow$	Factor común *(-1)* entre los términos en *x*.
$U(x) = -\left[(x-25)^2 - 625\right] - 96$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado dentro del paréntesis.
$U(x) = -(x-25)^2 + 625 - 96$	$\rightarrow$	Multiplicamos por *(-1)*.
$U(x) = -(x-25)^2 + 529$	$\rightarrow$	Entonces el vértice está en *V(25,529*), luego el número de accesorios que debe vender para lograr el máximo beneficio es: *25*.

¿?

¿Qué información dan los puntos de corte en el eje x?.

¿Por que crees que la gráfica debajo del eje x está dibujada con otro color?

La función cuadrática que modeliza la situación anterior está dada por la fórmula:

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,, \qquad \text{con } a, b, c \in R\,; \quad a \neq 0$$

y se la denomina ***función cuadrática completa***.

Para graficar es conveniente conocer previamente el *vértice*, el eje de simetría y las intersecciones con los ejes coordenados.

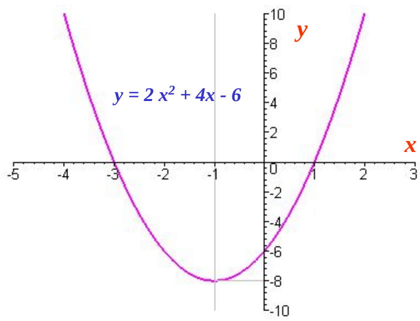
ALGUNOS EJEMPLOS

1. $y = 2x^2 + 4x - 6$

SOLUCIÓN:

- Calculamos el vértice

$y = 2(x^2 + 2x) - 6$	$\rightarrow$	Factor común entre los términos en *x*.
$y = 2\left[(x+1)^2 - 1\right] - 6$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado dentro del paréntesis.
$y = 2(x+1)^2 - 2 - 6$	$\rightarrow$	Multiplicamos por dos los términos dentro del corchete.
$y = 2(x+1)^2 - 8$	$\therefore$	Entonces el vértice está $V(-1,-8)$.



- Eje de simetría: $x = -1$
- Intersecciones en los ejes:

  Eje $y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow f(0) = -6$

  Eje $x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = 2(x+1)^2 - 8$

- La abscisa del vértice equidista de los puntos de intersección con el eje x.
- Se puede calcular:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

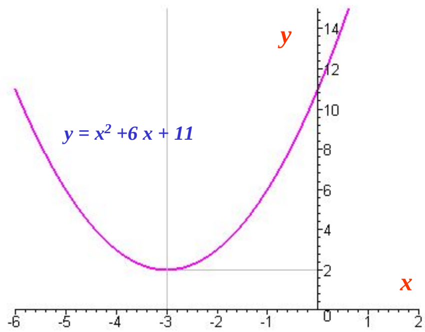
$$8 = 2(x+1)^2$$
$$4 = (x+1)^2$$
$$\sqrt{4} = |x+1| \Rightarrow \pm 2 = x+1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

2. $y = x^2 + 6x + 11$

SOLUCIÓN:

- Calculamos el vértice

$y = (x+3)^2 - 9 + 11$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado .
$y = (x+3)^2 + 2$	$\therefore$	$V(-3,2)$



- Eje de simetría: $x = -3$
- Intersecciones con los ejes

Eje y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 11 \Rightarrow f(0) = 11$

Eje x $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = (x+3)^2 + 2$

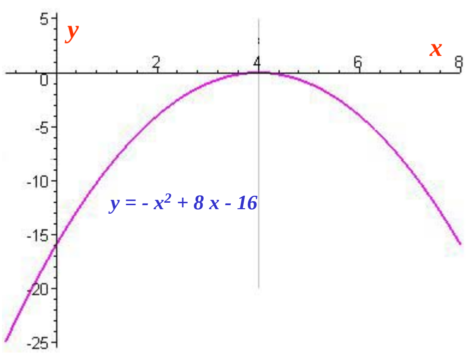
$-2 = (x+3)^2 \Rightarrow$ no hay solución en $\Re$, ¿Por qué?. Por lo tanto no hay intersección con el eje x.

3. $y = -x^2 + 8x - 16$

SOLUCIÓN:

- Calculamos el vértice

$y = -(x^2 - 8x + 16)$	$\rightarrow$	Sacamos factor común .
$y = -\left[(x-4)^2\right]$	$\rightarrow$	Completamos el cuadrado.
$y = -(x-4)^2$	$\therefore$	$V(4,0)$



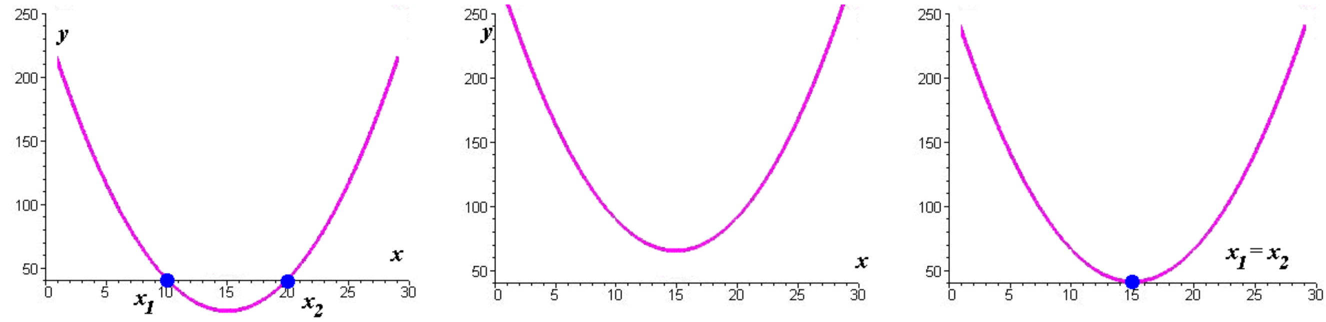
- Eje de simetría: $x = 4$
- Intersecciones en los ejes:

Eje y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -16 \Rightarrow f(0) = -16$

Eje x $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -(x-4)^2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4,0)$

Entonces el punto de corte con el eje x coincide con el vértice.

La gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ puede tener distintas posiciones respecto del eje x, las cuales se muestran en las figuras siguientes. Sea para el caso $a > 0$.



2.5.5 CEROS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Calcular, si existen, los valores x_1 y x_2 significa resolver la ecuación algebraica

$$0 = ax^2 + bx + c$$

cuya solución se puede obtener como se procedió en los ejemplos anteriores completando el cuadrado y calculando: x_1 y x_2 o utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así, en el ejemplo **1.** si: $y = 2x^2 + 4x - 6$, entonces $a = 2$; $b = 4$; $c = -6$; reemplazando los valores en la fórmula se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.2.(-6)}}{2.2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 \pm 8}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

En el ejemplo **2.** $y = x^2 + 6x + 11$, entonces $a = 1$; $b = 6$; $c = 11$, reemplazando los valores en la fórmula se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4.1.11}}{2.1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 44}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-8}}{2} =$$

No tiene solución en los R, luego como ya se observó no hay intersección con el eje x.

En el ejemplo **3.** $y = -x^2 + 8x - 16$,entonces $a = -1$; $b = 8$; $c = -16$, reemplazando los valores en la fórmula se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4.(-1).(-16)}}{2.(-1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{-2} = 4$$

luego $x_1 = x_2 = 4$ $\therefore$ existe un único punto de intersección.

2.5.6 FACTORIZACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

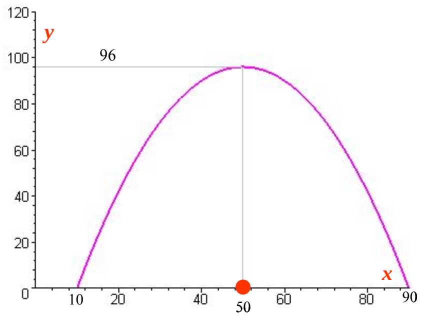
Si conocemos el valor del coeficiente del término de segundo orden *"a"* y los valores correspondientes a los puntos de intersección con el *eje x:* x_1 y x_2, la función se puede expresar:

$$y = a(x - x_1).(x - x_2)$$

A partir de esta fórmula se calcula fácilmente el vértice de la parábola, $V(x_V, y_V)$, donde:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \qquad\qquad y_V = f(x_1)$$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA



El rendimiento en *(%)* de un generador de placas solares en función de la temperatura está dado por una función cuadrática. Se sabe que el máximo *(96 %)* se tiene para una temperatura de *50 °C* y que es nulo para *10°C* y *90 °C*.

(a) Dibuja una gráfica que represente esta situación

(b) Escribe la ecuación que la representa.

SOLUCIÓN:

(b) Podemos expresar esta situación con la siguiente fórmula

$$y = a.(x - 10)(x - 90) \qquad (\,*\,)$$

El máximo corresponde al punto *(50 ,* 96). Sustituyendo en (*) calculamos el valor de *"a"*.

$$96 = a.(50 - 10)(50 - 90)$$

$$96 = a.(40)(-40) \quad \Rightarrow a = \frac{-96}{1600} = -0{,}06$$

$\therefore$ la ecuación que representa la situación es:

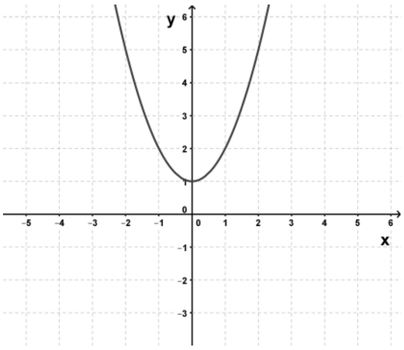
$$y = (-0{,}06).(x - 10)(x - 90)$$

A modo de síntesis:

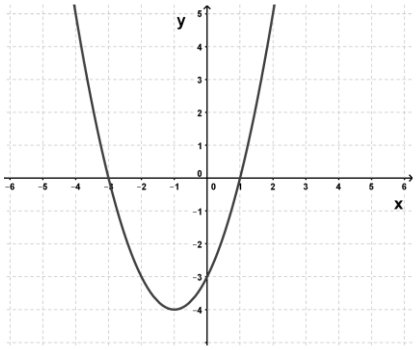
Toda función cuadrática se representa gráficamente por una parábola y toda parábola, con eje paralelo al eje y, es la gráfica de una función cuadrática.

ACTIVIDADES

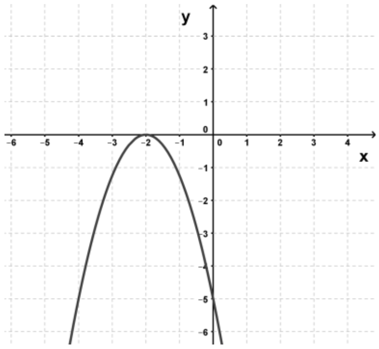
1) Identificá los elementos característicos de cada una de estas parábolas (vértice, eje de simetría, intersecciones con los ejes de coordenadas):



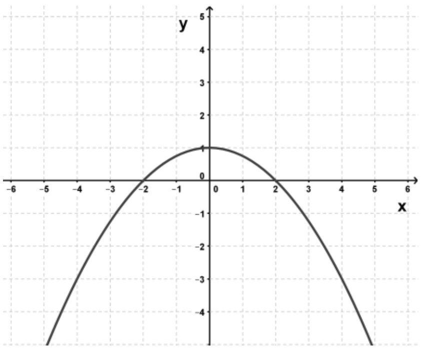
Función 1



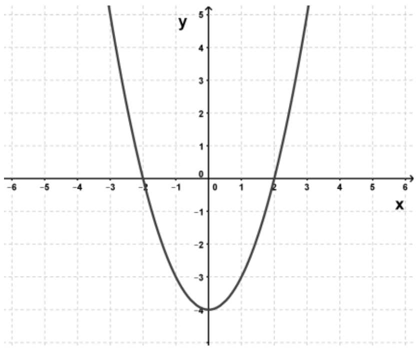
Función 2



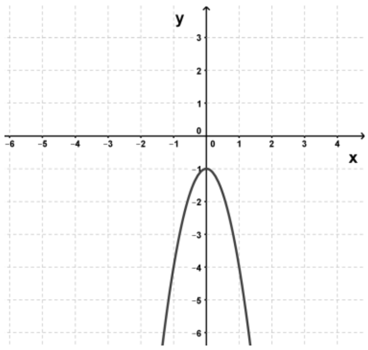
Función 3



Función 4



Función 5



Función 6

2) En cada caso, identificá en que forma está escrita la función (polinómica, factorizada o canónica) y determiná: vértice, eje de simetría, intersecciones con los ejes de coordenadas. Representá gráficamente.

a) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

b) $f(x) = 3x^2 + 6x$

c) $f(x) = 3(x-1)(x+3)$

d) $f(x) = 2(x-2)^2 + 1$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$

f) $f(x) = (x+4)^2$

3) Relacioná las siguientes expresiones de funciones cuadráticas con sus gráficos del ejercicio 1.

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = (x+2)(x-2)$

c) $f(x) = -(x+2)^2$

d) $f(x) = (x-1)^2 - 4$

e) $f(x) = -x^2 + 1$

f) $f(x) = (x+1)^2 - 4$

g) $f(x) = -\frac{5}{4}(x+2)^2$

h) $f(x) = (x+2)^2$

i) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

FRBB

4) Escribí las funciones que correspondan a las siguientes gráficas:

a) De $f(x)=x^2$ trasladada 3 unidades a la izquierda y $\frac{1}{3}$ unidad hacia abajo.

b) De $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ desplazada 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba.

c) De $f(x)=(x-3)^2$ desplazada 1 unidad a la izquierda y expansión vertical al doble.

d) De $f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$ trasladada 1,2 unidades hacia abajo.

e) De $f(x)=2(x-1)^2+\frac{5}{2}$ desplazada 5 unidades a la izquierda y con una reflexión con respecto al eje X.

5) Encontrá la expresión de la función cuadrática que cumpla con las siguientes condiciones:

a) Vértice en el origen, eje de simetría coincidente con el eje y , y que pase por *(3,-1)*.

b) Crece en el intervalo $(-\infty,1)$, su imagen es $(-\infty,3]$ y pasar por el punto *(-1, 2)*.

c) Corta al eje X en $x = -1$ y $x = 3$ y su mínimo absoluto es *(1, - 3)*.

6) Analizá similitudes y diferencias de las gráficas de la funciones: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ y $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-6$.

7) Encontrá los valores reales de k para que las funciones cumplan las condiciones pedidas:

a) $y=x^2+k\cdot x+3$ tiene vértice en el punto *(2,-1)*.

b) $y=k\cdot x^2$ pasa por el punto *(-3, 6)*.

c) $y=\frac{1}{2}x^2+2x+k$ tiene una raíz doble.

d) $y=k\cdot x^2+x-2$ tiene dos raíces reales distintas.

e) $y=-2x^2-4x+(-3+k)$ tiene imagen $(-\infty,2]$

8) Calculá un número entero tal que sumándole dos unidades al triplo de su cuadrado se obtiene siete veces dicho número.

9) El cuadrado de un número positivo menos el doble del número es igual a 3. ¿Cuál es el número?

10) ¿En cuánto se debe ampliar un cuadrado de *50 cm* de lado para que el área del nuevo cuadrado sea de *64* dm^2?

11) Se desea construir una plataforma de observación que dominará un valle. Sus dimensiones serán de 6 metros por 12 metros. Un cobertizo rectangular de 40 m^2 estará en el centro de la plataforma y la parte no cubierta será un pasillo de ancho uniforme. ¿Cuál será el ancho del pasillo?

12) Desde la azotea de un alto edificio se lanza una pelota hacia arriba. La altura a la que está la pelota con respecto al suelo viene dada por la función: $h(t) = 4,5 + 4t - 0,5t^2$ (t en segundos, h en dam).

- **a)** Representá gráficamente la función.
- **b)** ¿Cuál es la altura máxima que alcanza y en qué momento la alcanza?
- **c)** ¿A qué altura está la azotea?
- **d)** ¿Al cabo de cuantos segundos cae al suelo?
- **e)** ¿Cuál es el dominio de esta función?

13) En una isla se introduce una cierta cantidad de conejos en agosto de 1999. La función $f(x) = 1500 + 120x - 3x^2$ permite calcular la cantidad de conejos que hay en la isla x meses después del mes de agosto de 1999.

- **a)** ¿En qué mes la población de conejos fue máxima?
- **b)** ¿Qué cantidad de conejos se introduce inicialmente en la isla?
- **c)** ¿Cuál es la mayor cantidad de conejos que llega a haber en la isla?
- **d)** ¿Cuántos conejos hay en agosto del 2000?
- **e)** ¿Se extingue en algún momento la población de conejos?

14) En una pequeña empresa, con base a la experiencia de una fábrica se ha determinado que las unidades producidas transcurridas t horas de una jornada laboral se encuentran representadas por la expresión $P(t) = -t^2 + 100t$.

- **a)** Representá gráficamente la situación y determiná el Dominio y la Imagen.
- **b)** ¿A qué hora es máxima la producción? ¿Cuál es la máxima producción posible?
- **c)** Interpretá la ordenada al origen en términos del problema.

15) Los cables que sostienen un puente colgante tienen la forma de una parábola cuya ecuación es: $y = 0,01x^2 - x + 35$, donde x e y se miden en metros.

- **a)** Representá gráficamente, teniendo en cuenta que la longitud del puente es 100 metros.
- **b)** Encontrá la distancia entre el punto más bajo del cable y el piso del puente.
- **c)** Determiná la altura de las torres que sostienen a los cables.

16) Con una cuerda de 24 cm de longitud, construimos rectángulos de perímetro fijo.

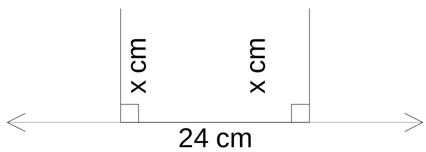
- **a)** Escribí la función que da el área del rectángulo según la longitud de la base.
- **b)** Represéntala gráficamente.
- **c)** ¿Cuál es el máximo de esta función?
- **d)** ¿Cuál es el dominio de esta función?

17) Se quiere construir una parcela rectangular y dividirla, con dos cercas paralelas a uno de sus lados, en tres sectores para realizar distintos cultivos. Se desea cercar con dos vueltas de alambre todo su perímetro y las divisiones. Para ello se cuenta con 800 metros de alambre.

- **a)** Expresá el área de la parcela como una función de la base.
- **b)** Represéntala gráficamente.
- **c)** ¿Cuál es el máximo de esta función?
- **d)** ¿Cuál es el dominio de esta función?

18) Una canaleta rectangular se construye doblando una lámina metálica de 24 cm de ancho como se muestra en la figura.

- **a)** Encontrá el área, en función de x, del corte transversal de la canaleta.
- **b)** ¿Cuánto debe medir x para que el volumen de agua que pasa por la canaleta sea la mayor posible?



19) La administración de un mercado de pulgas tiene 200 lugares rentados a 40 dólares cada uno. Si aumenta x cantidad de dólares por un espacio, disminuyen la cantidad de lugares rentados en el cuádruple del aumento.

- **a)** Expresá el ingreso que recibe la administración como una función de la cantidad de espacios rentados.
- **b)** Graficá la función hallada en **a)**.
- **c)** Interpretá las raíces en términos del problema.

Respuestas a algunas actividades del MÓDULO II

ACTIVIDADES FUNCIONES

Ejercicio 1:

a. Es función $D_f = [-1,+\infty)$ $I_f = [1,+\infty)$

b. Es función $D_f = R$ $I_f = \{3\}$

c. No es función

d. Es función $D_f = [0,2]$ $I_f = [0,1]$

e. No es función

f. Es función $D_f = R$ $I_f = [-1,+\infty)$

Ejercicio 2:

Función 1:

$D_f = (-\infty,3]$ $I_f = [-1,+\infty)$

$f(-1) = -1$ $f(0) = 1$ $f(1) = 3$ $f(3) = 3$

Crecimiento: $(-1,1)$

Decrecimiento: $(-\infty,-1)$

Mínimo: x = - 1

Función 2:

$D_f = [-2,+\infty)$ $I_f = (-\infty,3]$

$f(-1) = 0,5$ $f(0) = 0$ $f(1) = 2,5$ $f(3) = 2,5$

Crecimiento: $(0,2)$

Decrecimiento: $(-2,0),(2,+\infty)$

Máximos: $x = 2$

Mínimos: $x = 0$

Función 3:

$D_f = R$ $I_f = [-7,+\infty)$

$f(-1) = 0$ $f(0) = -6$ $f(1) = 0$ $f(3) = 0$

Crecimiento: $(-0,5;1,5),(2,5;+\infty)$

Decrecimiento: $(-\infty;-0,5),(1,5;2,5)$

Máximos: $x = 1,5$

Mínimos: $x = -0,5$ $x = 2,5$

Ejercicio 4:

a) Variable independiente: tiempo (en horas). Variable dependiente: temperatura (en ºC)

b) Durante 12 horas

c) Que las 5 horas su temperatura era de 38º C

d) Descenso de la temperatura.

- **e)** Durante las dos primeras horas, entre la sexta y octava hora, y a partir de la hora 12.

Ejercicio 5:

- **a)** Variable independiente: tiempo (en meses). Variable dependiente: precio del producto (en pesos)
- **b)** Duró 34 meses.
- **c)** Entre los $10 y $22.
- **d)** Que a los 26 meses de iniciada la investigación el precio del producto era de $10.
- **e)** $f(6)=20$
- **f)** Al inicio de la investigación, en el mes 12, entre los meses 18 y 24, y en el mes 32.
- **g)** Ordenadas al origen: $15.
- **h)** Indica el descenso del precio: $(8,14)\cup(24,26)$
- **i)** Si. Entre el mes 18 y 24.
- **j)** $22 en el mes 8.

Ejercicio 10:

- **a)** $g(x)=(x-2)^2+3$
- **b)** $g(x)=2(x+1)^3$
- **c)** $g(x)=-\sqrt{x}-2$
- **d)** $g(x)=\frac{1}{2}sen(-x)$

Ejercicio 14:

- **a)** $A(x)=-x^2+10x$
- **b)** $A(L)=\frac{\sqrt{3}\cdot L^2}{4}$
- **c)** $r(A)=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$
- **d)** $A(b)=-\frac{1}{2}b^2+40b$
- **e)** $A(x)=-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\right)x^2+6x$
- **f)** $A(R)=6\cdot\pi\cdot R^2$
- **g)** $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3+3\pi r^2$
- **h)** $A(x)=20x^2+\frac{180}{x}$
- **i)** $D(t)=\sqrt{1384}\cdot t$
- **j)** $P(L)=k\cdot\sqrt{L}$
- **k)** $P(T)=k_1\cdot T$ $\qquad$ $P(V)=\frac{k_2}{V}$

l) $A(x) = x^2 + \pi \cdot \left(\frac{5-2x}{\pi} \right)^2$

Ejercicio 15:

Los dominios son los correctos excepto en los siguientes incisos:

c) $D_f = R - \{3, -3\}$

d) $D_f = (-\infty, 3]$

f) $D_f = (-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$

g) $D_f = [1, 2) \cup (2, +\infty)$

i) $D_f = (-\infty, 2)$

ACITIVIDADES FUNCIÓN LINEAL:

Ejercicio 3:

- **a)** Variable independiente: altura (en metros). Variable dependiente: temperatura (en grados centígrados)
- **b)** $D_f = [0{,}15000]$
- **c)** $I_f = [-80{,}20]$ Representa la amplitude térmica.
- **d)** T(240) = 18,4ºC T(600) = 16º C
- **e)** Falso. T(1500) = 10º C
- **f)** La temperatura desciende 0,0067º C por metro, 6,7 º C por kilómetro.
- **g)** La temperatura será de -1º C a los 3150 metros de altura.
- **h)** Ceros: x = 3000 metros

  Positividad: $[0{,}3000)$

  Negatividad: $(3000{,}15000]$

Ejercicio 4:

- **a)** Falsa.
- **b)** Verdadera.
- **c)** Falsa.
- **d)** Falsa.

Ejercicio 5:

- **a)** $y = -2x - 1$
- **b)** $y = \frac{2}{5}x$
- **c)** $y = 4x - 3$
- **d)** $y = \frac{5}{3}x + 5$
- **e)** $y = -5$
- **f)** $y = -3x + 10$
- **g)** $y = -\frac{1}{2}x$

Ejercicio 6:

- **a)** $k = \frac{5}{3}$
- **b)** $k = 0$
- **c)** $k = -12$

Ejercicio 7:

- **a)** $k = -\frac{3}{5}$

b) k = 2

Ejercicio 8:
El triángulo es rectángulo en A.

Ejercicio 9:
Los puntos están alineados. Pertenecen a la recta $y = -x + 1$

Ejercicio 10:
El área es igual a 3 unidades cuadradas.

Ejercicio 11:
La ecuación de la mediatriz es $y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$

Ejercicio 12:
$y = -\frac{1}{8}x + 2$

Ejercicio 13:
a) $r(t) = 3t + 4$
b) $r(t) = 6t + 2$
c) $r(t) = -3t + 2$

Ejercicio 14:
a) $y = -10x + 20$
b) La temperatura es de -5º C
c) A los 3,2 km de altura.
d) Intersección con eje x en x = 2.
A los 2 km de altura la temperatura será de 0º C

Ejercicio 15:
a) Costo: $y = 100x + 350000$

Ingreso: $y = 200x$

b) El dominio será de 0 a 12000 piezas.

c) $b(x) = 100x - 350000$

d) Ceros: x = 3500

Positividad: $(3500, 12000]$

Negatividad: $[0, 3500)$

Ejercicio 16

a) $C(x)=\begin{cases} 300 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 500+50x & \text{si} \quad 2 < x \leq 10 \\ 900+25x & \text{si} \quad 10 < x \leq 20 \end{cases}$

b) $D_c=(0,20]$ $\qquad$ $I_c=[300,300]\cup(600,1000]\cup(1150,1400]$

c) C(6) = 800 $\qquad$ C(1,750) = 300

d) El peso del paquete es de 17,4 kg.

Ejercicio 17:

a) $y=0,02x+8,5$

Ejercicio 18:

a) $y=-\frac{8}{3}x+\frac{7520}{3}$

Ejercicio 19:

a) $y=5760x$

ACTIVIDADES FUNCIÓN CUADRÁTICA:

Ejercicio 2:

	Vértice	Eje de simetría	Intersección con eje Y	Intersección con eje X
a)	$V(3,4)$	$x=3$	$y=-5$	$x=1,\ x=5$
b)	$V(-1,-3)$	$x=-1$	$y=0$	$x=0,\ x=-2$
c)	$V(-1,-12)$	$x=-1$	$y=-9$	$x=1,\ x=-3$
d)	$V(2,1)$	$x=2$	$y=9$	No tiene
e)	$V(0,3)$	$x=0$	$y=3$	No tiene
f)	$V(-4,0)$	$x=-4$	$y=16$	$x=-4$

Ejercicio 4:

a) $g(x)=(x+3)^2-\frac{1}{3}$

b) $g(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2+1$

c) $g(x)=2(x-2)^2$

d) $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2,2$

e) $g(x)=-2(x+4)^2+\frac{5}{2}$

Ejercicio 5:

a) $y=-\frac{1}{9}x^2$

b) $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2+3$

c) $y=\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$

Ejercicio 7:

a) $k=-4$

b) $k=\frac{2}{3}$

c) $k=2$

d) $k\in\left(-\frac{1}{8},+\infty\right)$

e) $k=3$

Ejercicio 8:

El número entero es 2.

Ejercicio 9:

El número es 3.

Ejercicio 10:
Debe aumentarse 3 dm.

Ejercicio 11:
El ancho del pasillo puede ser 1 m o 8 m.

Ejercicio 12:
- **b)** Alcanza una altura máxima de 12,5 dam a los 4 seg.
- **c)** La azotea está a 4,5 dam.
- **d)** A los 9 seg.
- **e)** $D_h = [0,9]$

Ejercicio 13:
- **a)** En abril de 2001.
- **b)** Se introducen 1500 conejos.
- **c)** 2700 conejos.
- **d)** 2508 conejos.
- **e)** A los 50 meses.

Ejercicio 16:
- **a)** $A(b) = 12b - b^2$
- **b)** El máximo de la función es $V(6,36)$
- **c)** $D_A = (0,12)$

Ejercicio 17:
- **a)** $A(b) = 100b - \frac{1}{2}b^2$
- **b)** El máximo de la función es $V(100,5000)$
- **c)** $D_A = (0,200)$

Ejercicio 18:
- **a)** $A(x) = 24x - 2x^2$
- **b)** Debe medir 6 cm.

Ejercicio 19:
- **a)** $I(x) = -4x^2 + 40x + 8000$

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN Y PROFUNDIZACIÓN:

Ejercicio 1:

a) $y=\frac{1}{5}x+\frac{23}{5}$

b) $a=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $D_f=(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

d) $y=2(x-1)^2-2$

e) $y=(x+1)^2+2$

Ejercicio 2:

a) $L(x)=\frac{2000}{x}+3x$

b) $V(x)=(32-2x)\cdot(24-2x)\cdot x$

c) $T(d)=\sqrt{k\cdot d^3}$

Ejercicio 3:

a) $y=2x+3$

b) $s=-\frac{1}{2}$

c) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$

Ejercicio 4:

a) $y=-1800x+50000$

b) Por cada año transcurrido el valor de la maquinaria disminuye $1800

c) En el año 2011, el valor de la maquinaria es $30200

d) En el año 2009

e) Ordenada al origen: 50000, representa el valor inicial del maquinaria

Ejercicio 5:

a) Se llena antes el tanque B.

b) Se llena antes el tanque A.

c) Tendrán igual volumen a los 3 segundos.

Ejercicio 6:

b) $G(x)=\begin{cases}\frac{15}{4}x+15 & \text{si } 0\le x\le 4\\ 30 & \text{si } 4<x\le 6\\ -3x+30 & \text{si } 6<x\le 10\\ 5x & \text{si } x>10\end{cases}$

c) Creció 3,75 millones por año.

d) Nunca

e) Al inicio de la gestión y después del décimo año.

Ejercicio 7:

b) 40º C

c) A la hora tenía una temperatura de 30º C. A las 3 horas volvió a tener esa temperatura.

Ejercicio 8:

a) Las dimensiones son 1,641 m de base y 2,461 m de altura.

b) El área máxima es 6,153 m^2

3.10 NOCIONES DE GEOMETRÍA

A continuación, repasaremos algunas nociones de geometría que te serán útiles para plantear y resolver problemas a lo largo de este seminario.

En el mundo en el que vivimos podemos observar muchos objetos con formas geométricas. En la Naturaleza abundan más las líneas curvas, pero en los objetos construidos por los seres humanos predominan las rectas. Muchas de las figuras planas que podés contemplar a tu alrededor están limitadas por segmentos, por ejemplo, ventanas, puertas, baldosas, cuadros, etc. Estas figuras se llaman **polígonos**.

Los polígonos reciben diferentes nombres según el número de lados que tengan

Nombre del polígono	Número de lados
Triángulo	**3**
Cuadrilátero	**4**
Pentágono	**5**
Hexágono	**6**
Heptágono	**7**
Octógono	**8**
Eneágono	**9**

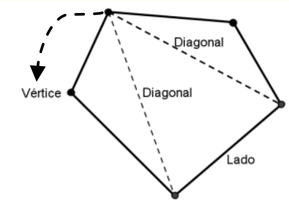
Los **lados** de un polígono son los segmentos que forman el borde del polígono.

La suma de las longitudes de los lados se denomina **perímetro**.

Dos lados consecutivos del polígono se unen en un punto llamado **vértice**.

Los segmentos que unen dos vértices no consecutivos del polígono se llaman **diagonales.**

Los polígonos que tienen todos sus lados iguales se llaman **polígonos regulares.**



3.11 CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

Por las longitudes de sus lados un triángulo puede ser:

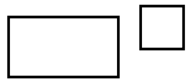
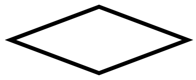
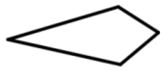
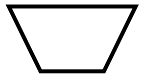
→ **Equilátero**, si tiene los tres lados de la misma longitud.
→ **Isósceles**, cuando tiene dos lados iguales y otro desigual.
→ **Escaleno**, si los tres lados tienen diferente longitud.

Según la amplitud de sus ángulos un triángulo puede ser:

→ **Acutángulo**, si los tres ángulos son agudos.
→ **Rectángulo**, cuando tiene un ángulo recto.
→ **Obtusángulo**, si tiene un ángulo obtuso.

3.1.2 CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS

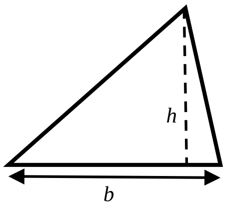
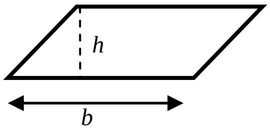
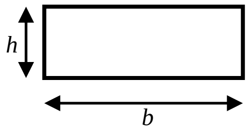
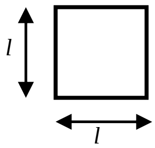
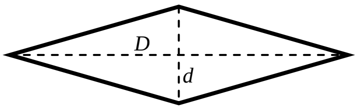
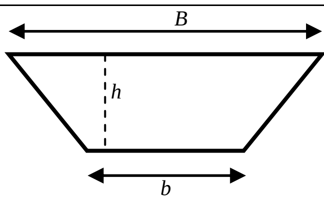
Estos polígonos se pueden clasificar según el número de lados paralelos que tengan, tal como se muestra en la tabla siguiente:

- Cuadriláteros
  - Paralelogramos (lados paralelos dos a dos)
    - Rectángulo 
    - Rombo 
    - Romboide 
  - Trapecios (sólo dos lados paralelos)
    - Trapecio Rectángulo 
    - Trapecio Isósceles 
    - Trapecio Escaleno 
  - Trapezoides (ningún lado paralelo) 

3.1.3 ÁREA DE FIGURAS PLANAS

A continuación recordaremos las áreas de las superficies poligonales más sencillas.

En el Sistema Métrico Decimal las unidades de medida son: Km, Hm, Dam, m, dm, cm y mm

Polígono	Área
 **Triángulo**	$\dfrac{b \cdot h}{2}$
 **Paralelogramo**	$b \cdot h$
 **Rectángulo**	$b \cdot h$
 **Cuadrado**	l^2
 **Rombo**	$\dfrac{D \cdot d}{2}$
 **Trapecio**	$\dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$

El **perímetro** de una circunferencia de radio r es:

Perímetro = 2. π . r

El **área** de una circunferencia de radio r es:

Area = π . r^2

3.1.4 CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia fija de un punto, llamado centro.

La circunferencia es el borde y el círculo es el interior de la circunferencia.

En la figura se muestran los principales elementos que existen en una circunferencia.

3.2.0 UN POCO DE HISTORIA

La trigonometría nació en el siglo II a.C. con el intento de Hiparco de transformar a las observaciones astronómicas en un arte más exacto; para ello elaboró tablas para una función relacionada con la moderna función *seno* y la evaluó en ángulos a intervalos de medio grado. Las utilizó principalmente para calcular la órbita de los planetas a través del espacio. Por su parte Erastótenes (≈ 276 – 196 a.C.) empleó la trigonometría para calcular la circunferencia de la Tierra y Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.) para estimar las distancias al Sol y a la Luna, (observó que cuando la Luna está exactamente en medio creciente es el vértice del ángulo recto que forma con el Sol y la Tierra).

La navegación, la agrimensura, la cartografía... fueron otras tantas fuentes de motivación para el desarrollo de la trigonometría.

La trigonometría moderna se interesa especialmente por la periodicidad de las funciones trigonométricas y podemos considerar que alcanza su máximo desarrollo con la aparición de las series de Fourier, a principios del siglo XIX, con lo que se une estrechamente al análisis, proporcionando un instrumento poderoso para la exploración de las vibraciones y movimientos periódicos. Esto ha permitido su aplicación en campos tan diversos como el procesamiento de señales en la industria telefónica, la codificación de música en reproductores de discos compactos, la determinación de las distancias a las estrellas, la producción de rastreos CAT para uso médico,....Así el electrocardiograma, como representación de una función periódica, es una herramienta fundamental que utiliza el médico para diagnosticar los distintos trastornos cardíacos por comparación de gráficos.

La importancia de este tipo de análisis se puso de manifiesto más claramente a medida que el hombre comprobó que su universo está lleno de ondas y vibraciones tanto al mirar a lo lejos, a las galaxias, como al explorar lo muy cercano, el interior de los átomos.

El estudio de la trigonometría puede enfocarse de dos maneras distintas. Una define la trigonometría como el estudio de <u>funciones de números reales</u>, la otra como el estudio de <u>funciones de ángulos</u>. Las <u>funciones trigonométricas</u> definidas en estas dos formas <u>son idénticas</u>, la diferencia es sólo de punto de vista y está relacionado con las aplicaciones. Así por ejemplo, cuando aplicamos las funciones trigonométricas al estudio del movimiento armónico, debemos considerarlas como funciones del tiempo, que es un número real. En cambio, para las aplicaciones estáticas, como la medición de distancias, direcciones,... , se las considera como funciones de ángulos.

Ambos puntos de vista son independientes, por lo que se puede iniciar el estudio en cualquier orden.

3.7.0 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

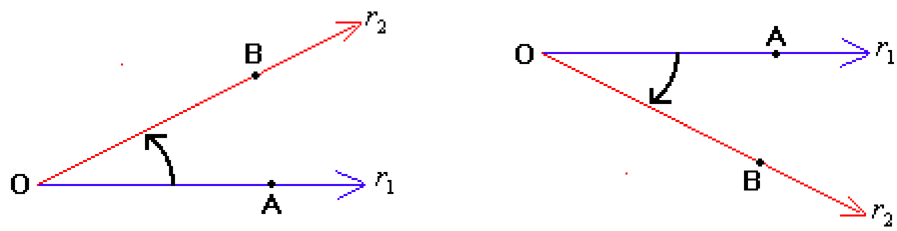
Como planteamos en los problemas de 3.1.0., para calcular distancias a puntos inaccesibles es posible considerar el método de triangulaciones , que se basa en la propiedad de resolver trigonométricamente un triángulo.

Si en un triángulo se conocen un lado y dos de sus ángulos o bien dos lados y el ángulo comprendido, es posible calcular fácilmente los restantes elementos del triángulo.

Para resolver estos problemas presentamos las funciones trigonométricas como funciones de ángulos, es decir, funciones que asocian a cada ángulo un número real

3.7.1 ÁNGULOS

Un ángulo A O B consta de dos semirrectas r_1 y r_2, con un origen común: O.



Interpretamos un ángulo como la rotación de r_1 hacia. r_2 En este caso a r_1 se lo llama lado inicial y a r_2 se lo llama lado terminal del ángulo. Si el sentido de la rotación es antihorario el ángulo se considera positivo y si el sentido es horario se lo considera negativo.

3.7.2 SISTEMAS DE MEDICIÓN

- **Sistema sexagesimal**: es uno de los sistemas más usados. Su unidad de medida es el ángulo igual a la noventa ava parte del ángulo recto y se lo llama grado sexagesimal

En símbolos

$$\boxed{\frac{1\ \text{ángulo recto}}{90} = 1^{\circ}}$$

Los submúltiplos son el minuto y segundo sexagesimal, que se definen:

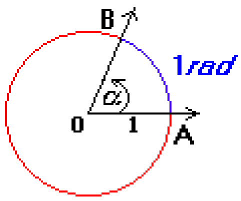
$$\boxed{\frac{1}{60} = 1'\ (minuto)} \qquad \boxed{\frac{1'}{60} = 1''\ (segundo)}$$

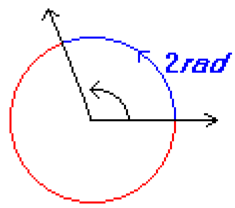
- **<u>Sistema radial</u>**

Se define la unidad de medida de la siguiente manera: se traza una circunferencia de radio 1 con el vértice del ángulo coincidiendo con su centro, la medida de ese ángulo es de un <u>radián</u> (rad) si el arco de circunferencia que abarca tiene una longitud igual al radio de la misma

$$1\ rad = \frac{long\ AB}{OA} = \frac{long\ AB}{1}$$

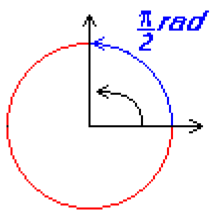
$$1\ rad = \frac{180^{o}}{\pi} \cong 57.296^{o}$$

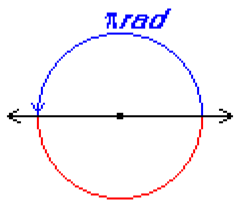




RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$1\ rad = \dfrac{180^{o}}{\pi}$; $180° = \pi\ rad$; $1^{o} = \dfrac{\pi\ rad}{180}$





Para convertir grados a radianes : $\alpha ' = \dfrac{\pi}{180°}\alpha°$

Para convertir radianes a grados : $\alpha° = \dfrac{180°}{\pi}\alpha '$

a) Expresá 120 ° en radianes
b) Expresá 2.5 rad. en grados sexagesimales

SOLUCIÓN: Usando la relación entre grados y radianes obtenemos

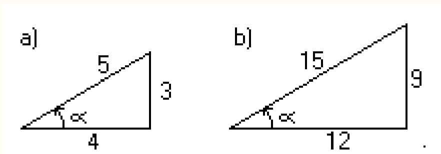
a) $120° = 120° \dfrac{\pi}{180°}\ rad = \dfrac{2}{3}\pi\ rad$

b) $2.5\ rad = \dfrac{180°}{\pi}\ 2.5 \cong \dfrac{180°\ 2.5}{3.1416} \cong 143°\ 14'\ 20''$

3.8.0 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Consideramos un triángulo rectángulo.que tiene α como uno de sus ángulos agudos Podemos definir relaciones entre sus lados del siguiente modo.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{cat.op.}{hip.}$	$\cos\alpha = \dfrac{cat.ady.}{hip.}$
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{cat.op.}{cat.ady.}$	$\cot g\alpha = \dfrac{cat.ady.}{cat.op.}$
$\cos ec\alpha = \dfrac{hip.}{cat.op.}$	$\cos ec\alpha = \dfrac{hip.}{cat.ady.}$

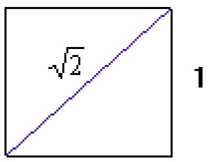


en a) $\begin{cases} \text{sen } \alpha = 3/5 \\ \cos \alpha = 4/5 \end{cases}$

en b) $\begin{cases} \text{sen } \alpha = 9/15 = 3/5 \\ \cos \alpha = 12/15 = 4/5 \end{cases}$

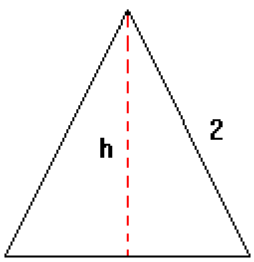
Los triángulos de la figura, para igual valor de α son semejantes, luego las razones son iguales independientemente del tamaño del triángulo, <u>sólo</u> dependen del <u>ángulo</u>

3.8.1 TRIÁNGULOS ESPECIALES



En algunos triángulos rectángulos se pueden calcular sus elementos con facilidad aplicando el teorema de Pitágoras.

- En un cuadrado de lado 1 se traza la diagonal y se obtiene un triángulo cuyos ángulos miden 45º, 45º y 90º y su hipotenusa $\sqrt{2}$.
- En un triángulo equilátero de lado 2 se traza la altura y se obtiene un triángulo cuyos ángulos miden 30º, 60º y 90º y sus lados 1, 2 y $\sqrt{3}$.



Con estos datos y las definiciones dadas es posible calcular las relaciones trigonométricas para ángulos de 30º, 45º y 60º

(o lo que es equivalente $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$).

Los valores están en la siguiente tabla, verificá los resultados.

α (grados)	**α (radianes)**	**Sen (α)**	**Cos (α)**	**Tg (α)**
0º	0	0	1	0
30º	π / 6	½	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	π / 4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	π / 3	$\sqrt{3}/2$	1 / 2	$\sqrt{3}$
90º	π / 2	1	0	-

Para calcular los valores de las razones trigonométricas para otros ángulos utilizaremos la calculadora.

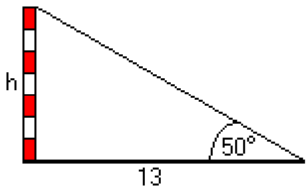
☞ Verificá si tu calculadora está en el <u>modo</u> correspondiente.

- **sin 2** indica el seno de un ángulo cuya medida es 2 radianes, se pasa la calculadora al modo en radianes (RAD) y se obtiene: sin 2 $\cong$ 0,9093
- Si se necesita calcular sin 2º , se pasa la calculadora al modo en grados (DEG) y se obtiene sin 2º $\cong$ 0,0349

3.8.2 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

> Resolver trigonométricamente un triángulo rectángulo consiste en, dados dos de sus elementos, calcular los elementos restantes

☞ 1) Calculá la altura de una torre si su sombra mide 13m cuando los rayos de sol forman un ángulo de 50º con la horizontal.

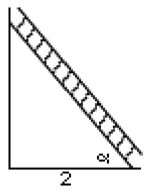


SOLUCIÓN:

- Dibujamos el triángulo asociado a los datos del problema.
- Identificamos la incógnita altura (h).
- Los datos son: el ángulo de 50º con la horizontal y la longitud de la sombra l = 13m.
- La razón trigonométrica que relaciona los datos y la incógnita es la

<u>tangente</u> : $\frac{h}{l}$ = tg 50º → h = 13m. tg 50º ≅ 15,5m

☞ 2) Una escalera de 4m está apoyada contra la pared. ¿Cuál es su inclinación si su base dista 2m de la pared?

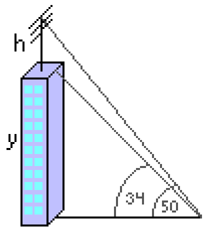


SOLUCIÓN:

- Dibujamos el triángulo asociado a los datos del problema.
- La incógnita es el ángulo de inclinación α .
- Con los datos del problema, cateto adyacente e hipotenusa podemos calcular α aplicando la relación del <u>coseno</u>.

cos α = $\frac{cat.adyacente}{hipotenusa} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, aplicando la función inversa arco coseno obtenemos: $\hat{\alpha}$ = 60º

☞ 3) Una antena de televisión se instala sobre el techo de un edificio desde un punto que está al nivel del pie del edificio, a 75m de distancia, los ángulos de elevación de la base y del extremo superior de la antena miden 34º y 50º respectivamente. ¿ Cuál es la altura de la antena?.



SOLUCIÓN:

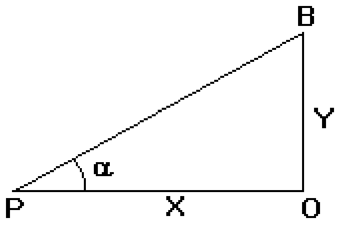
- Dibujamos un diagrama de la situación.
- La altura de la antena " h " la podemos calcular h = H – y
- Calculamos cada uno de estos valores

$\frac{H}{75}$ = tg 50º → H = 75.tg 50º ≅ 89,4m

$\frac{y}{75}$ = tg 34º → y = 75.tg 34º ≅ 50,6m

Luego la altura de la antena es

h = 89,4m – 50,6m = 38,8m ≅ 39m



Sea BOP un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α , ubicamos el ángulo $\hat{\alpha}$ de modo que su lado inicial coincida con el eje x y el vértice con el origen de coordenadas. El punto P = P(x, y) es un punto del lado terminal.

En el triángulo BOP el cateto adyacente tiene una longitud x, el opuesto y, aplicando el teorema de Pitágoras calculamos la hipotenusa

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Entonces:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} \quad ; \quad \text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$$

Luego podemos ampliar la definición de las razones trigonométricas a cualquier tipo de ángulo.

- Sea α el ángulo tal que: P (x, y) está en el lado terminal y su distancia r al origen es 1.

Según la definición de las funciones trigonométricas del ángulo α, se tiene:

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{y}{1} = y \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x}$$

- Si P(x, y) es también el punto terminal de un arco de longitud t.

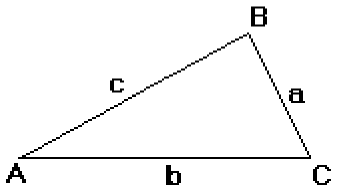
De acuerdo con la definición de las funciones trigonométricas del número real t se tiene:

$$\boxed{\text{sen } t = y \quad ; \quad \cos t = x}$$

- Si α se mide en radianes entonces: α = t

- Comparando las dos maneras de definir las funciones trigonométricas concluimos que dan <u>valores idénticos</u>

3.9.0 TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS



Teorema del Seno

En el triangulo ABC se verifica

$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$$

Teorema del Coseno

En el triangulo ABC se verifica

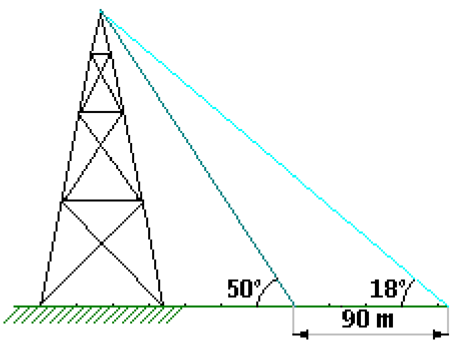
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2.c.b.\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2.c.a.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$$

Las funciones trigonométricas se pueden utilizar para resolver triángulos no rectángulos, como en los ejemplos (3) y (4) de 3.1.0

En estos casos se aplican las fórmulas del seno o del coseno, según los datos del problema.

MÁS EJEMPLOS

1. ¿Cuál es la altura de una torre si el ángulo de elevación disminuye de 50º a 18º cuando un observador que está situado a una cierta distancia del pie de la torre, se aleja 90m en la misma dirección?.



SOLUCIÓN:

- Dibujamos un diagrama con los datos.
- El problema puede resolverse por dos caminos.

a) Usando triángulos rectángulos

En el triángulo ABC se verifica la relación: tg 50º = $\frac{h}{x}$ (1)

En el triángulo ABD se verifica la relación: tg 18º = $\frac{h}{x+90}$ (2)

De (1) se tiene h = x. tg 50º

De (2) se tiene h = (x + 90). tg 18º

Igualando los segundos miembros se tiene:

$$x.tg\ 50º = (x + 90).tg\ 18º$$
$$x.1,2 = (x + 90).0,32$$
$$x.1,2 = x.0,32 + 90.0,32$$
$$x.(1,2 - 0,32) = 28,8$$
$$x.0,88 = 28,8$$
$$x = \frac{28,8}{0,88} \cong 32,7$$

Sustituyendo en (1) es h = 32,7.tg 50º $\cong$ 38,97m

$\therefore$ La torre tiene una altura aproximada de 39m

b) Aplicando el teorema del seno, se puede calcular $\overline{AC}$ y luego usando la definición de razón trigonométrica se calcula h.

- Calculamos los ángulos para aplicar el teorema.

$$\frac{sen32º}{90} = \frac{sen18º}{d} \quad \therefore \quad d = \frac{90.sen18º}{sen32º}$$

$$d \cong 52,6m$$

- En ABC calculamos h = 52,6.sen50º

$$h \cong 40,3m$$

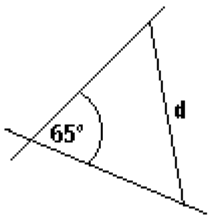
2) Dos carreteras rectas divergen formando un ángulo de 65º. Dos automóviles salen de la intersección a las 2:00 PM; uno viaja a 70 km/h y el otro a 90 km/h. ¿Qué distancia los separa a las 2:30 PM ?.

SOLUCIÓN:

- Dibujamos un diagrama.
- Suponemos que los automóviles viajan con M.U., luego se verifica d = v.t
- El tiempo es t = ½ h
- La distancia que recorrió cada automóvil está dada por:

  d1 = 70 km/h . ½ h = 35 km = $\overline{OA}$

  d2 = 90 km/h . ½ h = 45 km = $\overline{OB}$



- Se puede calcular $\overline{AB}$
- Aplicando el teorema del coseno se tiene.

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos 65º$$
$$d^2 = 45^2 + 35^2 - 2.45.35.\cos 65º$$
$$d^2 \cong 2025 + 1225 - 1331,25$$
$$d^2 \cong 1918,75$$
$$d \cong 43,8 \text{ km}$$

3.10.0 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

> Una ecuación trigonométrica es aquella que contiene funciones trigonométricas.

Así por ejemplo:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad ; \qquad 2\cos x - 1 = 0$$

son ecuaciones trigonométricas. La primera es una identidad, es decir, se verifica para todo valor de la variable x. La segunda solo se verifica para ciertos valores de x.

En general, si una ecuación trigonométrica tiene una solución entonces tiene una cantidad infinita de soluciones. ¿Por qué?

Para calcular todas las soluciones de la ecuación sólo se necesitan determinar las soluciones en el intervalo adecuado y después usar la propiedad de la periodicidad de las funciones trigonométricas.

Resolvemos la ecuación anterior:

$$2.\cos x - 1 = 0$$
$$2.\cos x = 1$$
$$\cos x = \tfrac{1}{2}$$

En el intervalo $[0, 2\pi\,)$ la función coseno es positiva si x pertenece al primero y al cuarto cuadrante, luego los valores que cumplen con la ecuación son:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{5\pi}{3}$$

Pero como la función es periódica y su período es 2π a esos valores se obtiene otra solución. Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación tienen la forma:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \qquad , \kappa \in Z$$

MÁS EJEMPLOS

☞ **1)** Calculá las soluciones de la ecuación 2.sen x .cos x + cos x = 0 si $0 \leq x < 2\pi$

SOLUCIÓN:

En este caso nos piden las soluciones en un intervalo dado.

2.sen x .cos x + cos x = 0
cos x . [2. sen x + 1] = 0 → factor común

Si el producto es nulo entonces se verifica:

cos x = 0 (1) o 2.sen x + 1 = 0 (2)

(1) cos x = 0 en $[0, 2\pi)$ si $x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{3\pi}{2}$

(2) 2.sen x + 1 = 0

2.sen x = -1

sen x = $-\frac{1}{2}$

En el intervalo $[0, 2\pi)$ la función seno es negativa si x está en el tercer o cuarto cuadrante, luego el valor que corresponde es $x = \frac{7\pi}{6}$ o $x = \frac{11\pi}{6}$

El conjunto solución es:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

2) Calculá las soluciones de $\cos^2 x = ½$ si $0 \le x < 2\pi$

SOLUCIÓN: $\cos^2 x = ½$

- Aplicamos $\sqrt{\ }$

$$\sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las soluciones correspondientes son:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = 7\frac{\pi}{4}$$

y

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = 5\frac{\pi}{4}$$

El conjunto solución es; $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

3) Calculá <u>todas</u> las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$

SOLUCIÓN:

Aplicamos la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado:

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right.$$

De aquí obtenemos:
- $\operatorname{sen} x = 1$ (1)
- $\operatorname{sen} x = -2$ (2)

- La ecuación $\operatorname{sen} x = 1$ se verifica si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in Z$
- La ecuación $\operatorname{sen} x = -2$ <u>no</u> tiene solución, porque la función seno tiene imagen entre –1 y 1.

Luego el conjunto solución es:

$$s = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\right\}$$

4) Calculá la solución de la ecuación 3cos x = 2 sen² x si $x \in [0, 2\pi)$

SOLUCIÓN:

Si usamos la identidad pitagórica: sen² x = 1 – cos² x, obtenemos una ecuación equivalente donde solo interviene la función seno.

3cos x = 2sen²x	. Original
3cos x = 2.(1 – cos² x)	.Identidad
3cos x – 2 + 2cos² x = 0	.Transposición de términos
2cos² x + 3cos x – 2 = 0	.Ordenamos

Aplicamos la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado:

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(2)(-2)}}{2.2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

- La ecuación cos x = ½ se verifica si x = $\frac{\pi}{3}$ o x = 5.$\frac{\pi}{3}$
- La ecuación cos x = -2 no tiene solución porque la función coseno tiene imagen entre –1 y 1 luego el conjunto solución es:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

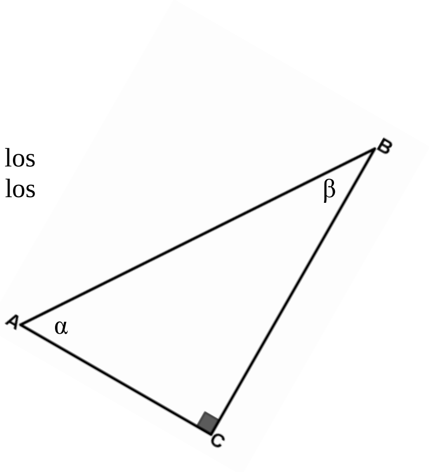
ACTIVIDADES

1) En cada caso, a partir del triángulo rectángulo de la figura y los datos dados, encontrá la longitud de los lados y la medida de los ángulos restantes:

a) $\hat{\alpha} = 30°$ y $|\overline{bc}| = 20\,\text{cm}$

b) $|\overline{ac}| = |\overline{bc}| = 5\,\text{cm}$

c) $\hat{\alpha} = 60°$ y $|\overline{ab}| = \sqrt{3}\,\text{cm}$



2) En un triángulo las medidas de sus ángulos interiores son $\hat{\alpha} = 45°$ y $\hat{\beta} = 105°$, y el lado que comparten dichos ángulos tiene una longitud de $\sqrt{2}$ cm. Determiná su perímetro.

3) En un triángulo rectángulo el coseno de uno de los ángulos agudos es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y la hipotenusa mide 4 cm. Determiná las medidas de los catetos y las medidas de los ángulos (en radianes).

4) En cada caso, encontrá la medida de x:

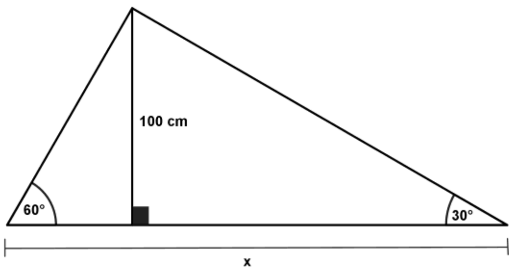


Figura 1

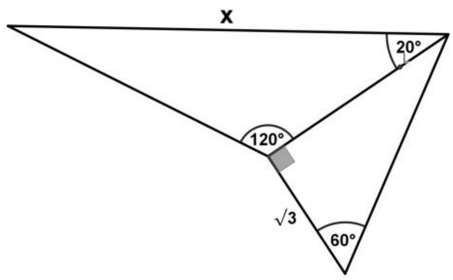
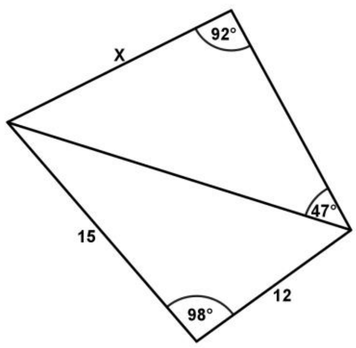


Figura 2

Figura 3



5) En cada caso, indicá la respuesta correcta, justificando tu respuesta:

a) Si un árbol de 2,38 metros proyecta una sombra de 1,6 metros, el ángulo de elevación del sol es aproximadamente:

i) 45º **ii)** 70º **iii)** 32º **iv)** 56º

b) La diagonal de un rectángulo mide 4 cm y forma con la base un ángulo de 60º. La superficie el rectángulo es aproximadamente:

i) 7,58 cm^2 **ii)** 8,24 cm^2 **iii)** 6,93 cm^2 **iv)** 9,12 cm^2

c) Desde una torre se arroja, con un ángulo de depresión de 27º, una soga de 15 metros de longitud y, al tensarla, su extremo se encuentra de la base de la torre aproximadamente a:

i) 13,36 m **ii)** 7,64 m **iii)** 29,44 m **iv)** 16,83 m

6) Un bote cruza un río de 380 m de ancho, pero la corriente lo desvía en su trayectoria unos 15°. ¿Cuántos metros recorre para cruzar el río?

7) ¿Cuál es el ángulo de elevación de un avión que recorre 5200 m en el aire y alcanza una altura de 3000 m?

8) Se quiere construir un tobogán acuático que consta de dos tramos inclinados y uno horizontal. Desde la pileta donde desemboca el primer tramo se observa con un ángulo de elevación de 25°, luego viene el tramo horizontal y, por último, un tramo inclinado con un ángulo de elevación de 35°. ¿Cuál es la longitud del tobogán si se sabe que ocupa en total 30,5 m de largo sobre la horizontal, tiene una altura máxima de 9 m y la parte recta se encuentra a 4,5 m de altura?

9) La distancia entre dos edificios A y B es de 120 metros. Si el edificio A mide 96 metros de altura y el ángulo de elevación del punto más alto del edificio A al punto más alto del edificio B es de 31º, calculá la altura del edificio B.

10) Desde un barco se miden las visuales a la base y el extremo de un faro de 30 metros de altura, situado sobre la base de un acantilado. Si los ángulos miden 18º y 35º, respectivamente. Calculá la distancia del barco a la costa y la altura del acantilado.

11) Una persona se encuentra a 110 m del lugar donde un globo aerostático comenzó a elevarse. Pasado un tiempo, el ángulo de elevación con el que observa el globo cambia de 20° a 35°. ¿Cuántos metros se elevó el globo durante ese período?

12) Desde un punto, ubicado sobre un camino recto inclinado 5° con respecto a la horizontal, se observa con un ángulo de elevación de 40° una torre de 30 metros de altura. Determiná la distancia entre el punto de observación y el punto más alto de la torre.

13) Para localizar una emisora clandestina E ubicada entre dos unidades receptoras R1 y R2, distantes entre si 8 km, las mismas orientan sus antenas en la dirección de recepción óptima. Se miden los ángulos R1=32º y R2=48º. ¿A qué distancia de R1 y R2se encuentra la emisora?

14) Dos automóviles transitan por una autopista que se bifurca en dos caminos que determinan un ángulo de 32°. En el mismo instante, cada automóvil toma un camino diferente a 75 km/h y a 90km/h, respectivamente. ¿A qué distancia se encuentran media hora después de separarse?

15) Un helicóptero viaja de una ciudad hacia otra, distantes entre sí 40 km. En un determinado momento, los ángulos que forman las visuales, desde el helicóptero hacia las ciudades, con la horizontal son de 14º y 26º, respectivamente. ¿A qué altura está el helicóptero? ¿Qué distancia hay en ese momento entre el helicóptero y cada una de las ciudades?

16) Dos barcos salen de un mismo puerto simultáneamente. Uno avanza a una velocidad de 50 km/h en dirección N 50º E y el otro a una velocidad de 45 km/h en dirección S 70º E. ¿Qué distancia los separa después de una hora?

17) Un ingeniero observa una maqueta de tres casas que deberá construir. Las casas A y B se encuentran separadas por un lago. Trazando líneas rectas desde A hasta C y desde B hasta C, observa que la distancias son 50 cm y 70 cm, respectivamente. Además, el ángulo que forman dichas líneas rectas es de 65°.
Sabiendo que la escala para realizar la maqueta fue $1\,\text{cm} \equiv 2\,\text{km}$, ¿cuál es la longitud real del lago que separa las casas A y B?

18) Indicá en qué cuadrante se encuentra α si:

a) $\cos\alpha > 0$ y $\operatorname{sen}\alpha < 0$.

b) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ y $\cos\alpha < 0$.

c) $\sec\alpha < 0$ y $\operatorname{sen}\alpha > 0$.

19) Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, determiná el valor de $\operatorname{tg}\alpha$, $\sec\alpha$ y $\operatorname{cosec}\alpha$.

20) Sin encontrar α, sabiendo que $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ y que $\alpha \in \text{IV cuad}$, determiná $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$.

21) Si $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ y $\alpha \in \text{III}$ cuadrante, calculá:

(<u>Sugerencia</u>: antes de realizar los cálculos, simplificá las expresiones)

a) $\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha - 3.\operatorname{cosec}\alpha =$

b) $\cos\alpha \cdot (\sec\alpha - \cos\alpha) =$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \sec\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} =$

d) $(\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{sen}\alpha) : \operatorname{cotg}\alpha =$

22) En cada caso, determiná el valor de α que cumpla las condiciones indicadas:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}$ $\quad \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

b) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ $\quad \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

c) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \pi < \alpha < 2\pi$.

d) $\operatorname{sen}\alpha = -1$ $\quad 0 < \alpha < \pi$.

23) Calculá todas las soluciones de las ecuaciones:

a) $2.\operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0$

b) $2 \cdot \cos^2 x - 1 = 0$

c) $\operatorname{sen}^2 x = 2 \cdot \operatorname{sen} x + 3$

d) $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1 = 0$

e) $\cos x \cdot \operatorname{sen} x - 2 \cdot \operatorname{sen} x = 0$

f) $3 \cdot \cos x = \operatorname{sen}^2 x$

g) $\operatorname{cosec}^2 x - 4 = 0$

h) $\sec x + \operatorname{tg} x = 0$

i) $2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = 0$

j) $2 \cdot \operatorname{cotg} x + \sqrt{3} \cdot \operatorname{cosec} x = 0$

k) $2 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right) + \sqrt{2} = 0$

l) $\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right) \cdot (\cos x + 2) = 0$

ACITIVIDADES TRIGONOMETRÍA:

Ejercicio 1:

a) $\beta = 60°$, $\left|\overline{AC}\right| = 20\sqrt{3}\,\text{cm}$ y $\left|\overline{AB}\right| = 40\,\text{cm}$

b) $\alpha = \beta = 45°$ y $\left|\overline{AB}\right| = 5\sqrt{2}\,\text{cm}$

c) $\beta = 30°$, $\left|\overline{AC}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}$ y $\left|\overline{AB}\right| = \dfrac{3}{2}\,\text{cm}$

Ejercicio 2:
Perímetro = 6,15 cm

Ejercicio 3:
Los ángulos miden $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$. Los catetos 2 cm y $2\sqrt{3}$ cm.

Ejercicio 4:

Figura 1: 230,94 cm
Figura 2: 4,04 cm
Figura 3: 14,98 cm

Ejercicio 5:

a) Opción iv)
b) Opción iii)
c) Opción i)

Ejercicio 6:
Recorre 394,4 metros.

Ejercicio 7:
El ángulo de elevación es de 35° 14´ 3”

Ejercicio 8:
La longitud total del tobogán es de 32,8 metros.

Ejercicio 9:
La altura del edificio es 168,10 metros.

Ejercicio 10:
Distancia del barco a la costa es 79,939 metros y la altura del acantilado es 25,974 metros.

Ejercicio 11:
Subió 37 metros, aproximadamente.

Ejercicio 12:
La distancia es de 52 metros, aproximadamente.

Ejercicio 13:
Las distancias son 6,03 km y 4,3 km.

Ejercicio 14:
Se encuentran a 24 kilómetros, aproximadamente.

Ejercicio 15:
El helicóptero vuela a 6,6 km y las distancias a las ciudades son 15,055 km y 27,279 km.

Ejercicio 16:
La distancia es 47,697 km.

Ejercicio 17:
La longitud real es de 133,3 km aproximadamente.

Ejercicio 19:
$\operatorname{tg}\alpha = 1$ $\qquad \sec\alpha = \sqrt{2}$ $\qquad \operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{2}$

Ejercicio 20:
$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$

Ejercicio 21:

a) $-3 + \frac{17}{4}\sqrt{3}$

b) $\frac{8}{9}$

c) 1

d) $-\frac{1}{3}$

Ejercicio 22:

a) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

b) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$

c) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

d) No existe valor de α que verifique esa condición.

Ejercicio 23:

a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$

b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_4 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$

c) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$

d) $x_1 = 4k\pi,\ k \in Z$

e) $x_1 = 0 + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_2 = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$

f) $x_1 = 1{,}263 + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_2 = 5{,}02 + 2k\pi,\ k \in Z$

g) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_4 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$

h) No tiene solución.

i) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_3 = 2k\pi,\ k \in Z$

$x_4 = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$

j) $x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$

k) $x_1 = 5\pi + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_2 = 7\pi + 2k\pi,\ k \in Z$

l) $x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$

$x_2 = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in Z$